भौतिकी

भाग 1

कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

11088

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

11088 – भौतिकी (भाग 1)
कक्षा 11 के लिए पाठ्यपुस्तक

ISBN 81-7450-515-6

प्रथम संस्करण
मार्च 2006 फाल्गुन 1927

पुनर्मुद्रण
मार्च 2007, जनवरी 2008, जून 2009, दिसंबर 2009, नवंबर 2010, फरवरी 2012, जनवरी 2013, जून 2014, दिसंबर 2014, दिसंबर 2015, मार्च 2017, जनवरी 2018, जनवरी 2019 और नवंबर 2019

प्रथम संस्करण
दिसंबर 2022 पौष 1944

PD NTR BS

₹ 150.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III स्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781 021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*अनूप कुमार राजपूत*
मुख्य उत्पादन अधिकारी	:	*अरुण चितकारा*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*विपिन दिवान*
मुख्य संपादक (प्रभारी)	:	*बिज्ञान सुतार*
संपादक	:	*नरेश यादव*
उत्पादन सहायक	:	

आवरण एवं चित्रांकन
श्वेता राव

प्रस्तावना

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास हैं। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभवों पर विचार करने का कितना अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फ़ेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् विज्ञान एवं गणित पाठ्यपुस्तक सलाहकार समिति के अध्यक्ष, प्रोफ़ेसर जे.वी. नार्लीकर और इस पाठ्यपुस्तक के मुख्य सलाहकार, प्रोफ़ेसर ए.डब्ल्यू. जोशी, जिन्होंने इस समिति के कार्य को निर्देशित किया, की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान किया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। प्रोफ़ेसर मृणाल मीरी और प्रोफ़ेसर जी. पी. देशपांडे की अध्यक्षता में मानव संसाधन विकास मंत्रालय के अधीन उच्च माध्यमिक शिक्षा विभाग द्वारा गठित निगरानी समिति (मॉनीटरिंग कमेटी) के सदस्यों के अमूल्य समय और सहयोग के लिए हम कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक

नयी दिल्ली

20 दिसंबर 2005

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

पाठ्यपुस्तकों में पाठ्य सामग्री का पुनर्संयोजन

कोविड-19 महामारी को देखते हुए, विद्यार्थियों के ऊपर से पाठ्य सामग्री का बोझ कम करना अनिवार्य है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 2020* में भी विद्यार्थियों के लिए पाठ्य सामग्री का बोझ कम करने और रचनात्मक नज़रिए से अनुभवात्मक अधिगम के अवसर प्रदान करने पर ज़ोर दिया गया है। इस पृष्ठभूमि में, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने सभी कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित करने की शुरुआत की है। इस प्रक्रिया में रा.शै.अ.प्र.प. द्वारा पहले से ही विकसित कक्षावार सीखने के प्रतिफलों को ध्यान में रखा गया है।

पाठ्य सामग्रियों के पुनर्संयोजन में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखा गया है –

- एक ही कक्षा में अलग-अलग विषयों के अंतर्गत समान पाठ्य सामग्री का होना;
- एक कक्षा के किसी विषय में उससे निचली कक्षा या ऊपर की कक्षा में समान पाठ्य सामग्री का होना;
- कठिनाई स्तर;
- विद्यार्थियों के लिए सहज रूप से सुलभ पाठ्य सामग्री का होना, जिसे शिक्षकों के अधिक हस्तक्षेप के बिना, वे खुद से या सहपाठियों के साथ पारस्परिक रूप से सीख सकते हों;
- वर्तमान संदर्भ में अप्रासंगिक सामग्री का होना।

वर्तमान संस्करण, ऊपर दिए गए परिवर्तनों को शामिल करते हुए तैयार किया गया पुनर्संयोजित संस्करण है।

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित पाठ्यपुस्तकों की सलाहकार समिति

जे.वी. नार्लीकर, *इमेरिटस प्रोफ़ेसर*, अंतर-विश्वविद्यालय केंद्र : खगोलविज्ञान और खगोलभौतिकी, पुणे

मुख्य सलाहकार

ए.डब्ल्यू. जोशी, *प्रोफ़ेसर*, हानरेरी विजिटिंग साइंटिस्ट, एनसीआरए, पुणे
(भूतपूर्व प्रोफ़ेसर, भौतिकी विभाग, पुणे विश्वविद्यालय)

सदस्य

अनुराधा माथुर, *पी.जी.टी.*, मॉडर्न स्कूल, बसंत विहार, नयी दिल्ली
आर.जोशी. *प्रवक्ता* (एस.जी.), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी. प्रधान, *प्रोफ़ेसर*, होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केन्द्र, टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च, मुंबई
एन. पंचपकेशन, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस. राय चौधरी, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी एवं खगोलभौतिकी विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
एस.के. दास, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एस.एन. प्रभाकर, *पी.जी.टी.*, डी.एम.स्कूल, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर
गगन गुप्त, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
चित्रा गोयल, *पी.जी.टी.*, राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, त्यागराज नगर, लोदी रोड, नयी दिल्ली
टी.जे. सिंह, *प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, मणिपुर विश्वविद्यालय, इम्फाल
पी.के. श्रीवास्तव, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, निदेशक, सीएसईसी, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली
पी.के. मोहंती, *पी.जी.टी.*, सैनिक स्कूल, भुवनेश्वर
पी.सी. अग्रवाल, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., भुवनेश्वर
वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
शेर सिंह, *पी.जी.टी.*, नवयुग स्कूल, लोदी रोड, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक (अंग्रेजी संस्करण)

वी.के. शर्मा, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

हिंदी अनुवादक

आर.एस. दास, *अवकाश प्राप्त उपप्रधानाचार्य*, बलवंत राय मेहता विद्याभवन सीनियर सेकंडरी स्कूल, नयी दिल्ली
ओ.पी. खंडेलवाल, *अवकाश प्राप्त रीडर*, द्रोणाचार्य राजकीय महाविद्यालय, गुड़गाँव, हरियाणा
जे.पी. अग्रवाल, *अवकाश प्राप्त प्राचार्य*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली
विनोद प्रकाश, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद, उ.प्र.

सदस्य-समन्वयक

वी.पी. श्रीवास्तव, *रीडर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

आभार

पुस्तक के अंतिम स्वरूप के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के बारे में परिषद् आभार व्यक्त करती है: वी.बी. त्रिपाठी, *अवकाश प्राप्त प्रोफ़ेसर*, भौतिकी विभाग, आई.आई.टी., नयी दिल्ली; एम.एन. बापट, *रीडर*, क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, एन.सी.ई.आर.टी., मैसूर; डी. प्रसाद, *वरिष्ठ वैज्ञानिक अधिकारी* (अवकाश प्राप्त), विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी विभाग, नयी दिल्ली; जे.सी. शर्मा, *शिक्षा अधिकारी*, शिक्षा निदेशालय, राष्ट्रीय राजधानी क्षेत्र, दिल्ली।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् एम. चन्द्रा, *प्रोफ़ेसर* तथा *विभागाध्यक्ष,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली की आभारी है।

परिषद् सन 2017 में पाठ्य के पुनरीक्षण और परिष्करण में अमूल्य योगदान के लिए ए.के. श्रीवास्तव, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; अरनब सेन, एन.ई.आर.आइ.ई., शिलांग; एल.एस. चौहान, आर.आइ.ई., भोपाल; ओ.एन. अवस्थी (रिटायर्ड), आर.आइ.ई, भोपाल; रचना गर्ग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; रामन नंबूदरी, आर.आइ.ई., मैसुरू; आर.आर. कोइरेंग, डी.सी.एस. एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; शशि प्रभा, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली और एस.वी. शर्मा, आर.आइ.ई., अजमेर का भी आभार व्यक्त करती है।

परिषद् गीता, इन्द्र कुमार, हरि दर्शन लोधी *डी.टी.पी. ऑपरेटर;* रेशमा नेगी, सतीश झा, *कॉपी एडीटर;* अनुराधा, रणधीर ठाकुर, *प्रूफ रीडर;* दीपक कपूर, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. और प्रकाशन विभाग के सहयोग हेतु हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

आमुख

एक दशक से भी अधिक समय पूर्व, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने प्रो. टी.वी. रामकृष्णन, एफ.आर.एस., की अध्यक्षता में लेखकों के एक दल की सहायता से कक्षा 11 तथा 12 के लिए लिखी गई पाठ्यपुस्तकें प्रकाशित की थीं। इन पुस्तकों को विद्यार्थियों तथा शिक्षकों ने समान रूप से भलीभांति अपनाया। वास्तव में ये पुस्तकें मील का पत्थर तथा विचारधारा निर्धारित करने वाली सिद्ध हुईं। तथापि, पाठ्यपुस्तकों और विशेषकर विज्ञान की पुस्तकों का विकास परिवर्तनशील बोध, आवश्यकता, पुनर्निवेशन तथा विद्यार्थियों, शिक्षाविदों तथा समाज के अनुभवों की दृष्टि से एक गत्यात्मक प्रक्रिया है। विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2000 पर आधारित संशोधित पाठ्यक्रमों के अनुरूप भौतिकी की पाठ्यपुस्तकों का एक दूसरा संस्करण प्रोफेसर सुरेश चन्द्र के निर्देशन में प्रकाशित किया गया जो अब तक लागू था। हाल में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 (एन.सी.एफ. 2005) प्रकाशित की तथा विद्यालयी स्तर पर पाठ्यचर्या नवीकरण प्रक्रिया के दौरान पाठ्यक्रम में तदनुसार संशोधन किया गया। *उच्चतर माध्यमिक स्तर के लिए पाठ्यक्रम* (एन.सी.ई.आर.टी., 2005) विकसित किया गया है। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तक में 15 अध्याय दो भागों में हैं। भाग 1 में प्रथम आठ अध्याय हैं जबकि भाग 2 में अगले सात अध्याय हैं। प्रस्तुत पुस्तक वर्तमान पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के नवीन प्रयास का परिणाम है और साथ ही यह आशा है कि विद्यार्थी भौतिकी के सुंदरता एवं तर्क का महत्त्व समझेंगे। उच्चतर माध्यमिक स्तर के आगे विद्यार्थी भौतिकी का अध्ययन जारी रख सकते हैं या नहीं भी परन्तु हम मानते हैं कि वे चाहे किसी भी दूसरे विषय का अध्ययन करें, उसमें वे भौतिकी की सोच–विचार प्रक्रिया को उपयोगी पाएँगे। यह विषय, कुछ भी हों, जैसे – अर्थव्यवस्था, प्रशासन, सामाजिक विज्ञान, पर्यावरण, अभियांत्रिकी, प्रौद्योगिकी, जीवविज्ञान या चिकित्साशास्त्र। उन विद्यार्थियों के लिए, जो भौतिकी का अध्ययन इस स्तर के आगे जारी रखेंगे, इस पुस्तक में विकसित विषय निश्चय ही एक सुदृढ़ आधार प्रदान करेगा।

विज्ञान और प्रौद्योगिकी की लगभग सभी शाखाओं के ज्ञान का आधारभूत भौतिकी है। यह उल्लेख करना रोचक है कि भौतिकी की धारणाओं एवं विचारों का उपयोग ज्ञान की दूसरी भाषाओं; जैसे – अर्थशास्त्र, वाणिज्य और व्यवहार विज्ञान में भी बढ़ता जा रहा है। हम इस तथ्य से अनभिज्ञ हैं कि भौतिकी के कुछ सरल आधारिक सिद्धांत प्राय: प्रत्यात्मक रूप में जटिल होते हैं। इस पुस्तक में हमने 'प्रत्यात्मक सामंजस्य' लाने का प्रयास किया है। शैक्षणिक तथा विषय की परिशुद्धता को बनाए रखकर सरल एवं सुबोध भाषा का प्रयोग करना हमारे प्रयास का केंद्र बिंदु है। भौतिकी विषय की प्रकृति ही ऐसी है जिसके लिए कुछ न्यूनतम गणित का उपयोग करना आवश्यक हो जाता है। जहाँ तक संभव हो सका है हमने गणितीय सूत्रों को तार्किक ढंग से विकसित करने का प्रयास किया है।

भौतिकी के विद्यार्थियों एवं अध्यापकों को पूर्ण रूप से समझना चाहिए कि भौतिकी विषय को याद करने की बजाय बोधगम्य बनाने की आवश्यकता होती है। जब हम माध्यमिक से उच्चतर माध्यमिक या आगे की स्तर को जाते हैं तो भौतिकी में मुख्य रूप से चार अवयव होते हैं : (i) गणित का पर्याप्त सुदृढ़ आधार, (ii) तकनीकी शब्द एवं पद जिनके अंग्रेजी भाषा में सामान्य अर्थ एकदम भिन्न हो सकते हैं, (iii) नयी जटिल अवधारणाएँ, तथा (iv) प्रायोगिक आधार। भौतिकी में गणित की आवश्यकता है क्योंकि हम अपने चारों ओर के परिवेश का यथार्थ चित्रण विकसित तथा अपने प्रेक्षणों को मेय राशियों के पदों में व्यक्त करना चाहते हैं। भौतिकी कणों के नए गुणों की खोज करती है तथा प्रत्येक कण के लिए एक नाम देना चाहती है। शब्द

आमतौर से अंग्रेजी, लैटिन, या ग्रीक भाषा से लेते हैं परन्तु भौतिकी इन शब्दों को एकदम नया अर्थ देती है। इसको समझने के लिए आप ऊर्जा, बल, शक्ति, आवेश, स्पिन या इस तरह के अन्य शब्दों के मान किसी मानक अंग्रेजी शब्दावली में देख सकते हैं तथा इनके अर्थों को भौतिकी में प्रयुक्त इन शब्दों के अर्थों से तुलना कर सकते हैं। भौतिकी कणों के व्यवहार को समझाने के लिए जटिल एवं अनूठी अवधारणाओं को विकसित करती है। अन्ततः यह याद रखना होगा कि भौतिकी प्रेक्षणों और प्रयोगों पर आधारित है – इनके अभाव में किसी सिद्धांत को भौतिकी के क्षेत्र में मान्यता नहीं मिलती है।

इस पुस्तक में कुछ विशिष्टताएँ हैं । हमें पूर्ण आशा एवं विश्वास है कि ये विद्यार्थियों के लिए पुस्तक की उपयोगिता में वृद्धि करेंगी । अध्याय की विषय-वस्तु पर तेजी से सरसरी दृष्टि डालने के लिए प्रत्येक अध्याय के अंत में **सारांश** दिया गया है । इसके पश्चात् **विचारणीय विषय** दिए गए हैं जो विद्यार्थियों के मस्तिष्क में उत्पन्न होने वाली संभावित भ्रांतियों, अध्याय में दिए कुछ प्रकथनों/सिद्धांतों में छिपी उलझनों तथा अध्याय से उपलब्ध ज्ञान के उपयोग के लिए आवश्यक 'चेतावनियों' की ओर इंगित करते हैं। ये कुछ विचार उत्तेजक प्रश्न भी उठाते हैं जिनसे विद्यार्थी भौतिकी के परे जीवन पर विचार कर सके। इन 'बिंदुओं' पर सोचना तथा अपने मस्तिष्क का अनुप्रयोग करना विद्यार्थियों को रोचक लगेगा । इसके अतिरिक्त संकल्पनाओं के स्पष्टीकरण तथा/अथवा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोगों की व्याख्या के लिए बड़ी संख्या में पाठ्य सामग्री में 'हल सहित अभ्यासों' का समावेश किया गया है । यदा-कदा भौतिकी विषय के क्रमिक विकास के प्रति जिज्ञासा को शांत करने के लिए ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्यों को भी सम्मिलित किया गया है । बहुत से अध्यायों में या तो इसी उद्देश्य के लिए अथवा उन विषयवस्तुओं जिनमें विद्यार्थियों को अतिरिक्त ध्यान देने की आवश्यकता होती है, उनकी कुछ विशेष विशिष्टताओं की ओर आकर्षित करने के उद्देश्य से विषयवस्तु को 'बॉक्स' में दिया गया है । पुस्तक के अंत में पुस्तक में प्रयुक्त मुख्य शब्दों की सूची दी गई है।

भौतिकी की विशेष प्रकृति, धारणाओं की समझ के अलावा कुछ परिपाटियों का ज्ञान, आधारभूत गणितीय साधन, महत्त्वपूर्ण भौतिक स्थिरांकों के आंकिक मान, सूक्ष्म स्तर से गैलेक्सीन स्तर के परिसर तक उपयोगी मात्रकों की प्रणाली की अपेक्षा करती है। विद्यार्थियों की सहायता के लिए हमने पुस्तक के अंत में परिशिष्ट A1 से A9 के रूप में आवश्यक साधन एवं डाटाबेस दिए हैं। अतिरिक्त जानकारी या किसी अध्याय विशेष में वर्णित विषय के उपयोग के लिए कुछ अध्यायों के अंत में भी कुछ परिशिष्ट दिए गए हैं।

सुस्पष्ट चित्र प्रदान करने की ओर विशेष ध्यान दिया गया है । चित्रों की स्पष्टता में वृद्धि के लिए उन्हें 'दो रंगों' में रेखांकित किया गया है । प्रत्येक अध्याय के अंत में पर्याप्त संख्या में अभ्यास दिए गए हैं । इनमें से कुछ जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से संबंधित हैं । विद्यार्थियों से अनुरोध है कि वे इन्हें हल करें और ऐसा करते समय वे इन अभ्यासों को अत्यधिक शिक्षाप्रद पाएंगे। कुछ अतिरिक्त अभ्यास भी दिए गए हैं जो अधिक कठिन हैं। कुछ अभ्यासों को हल करने के लिए संकेत एवं उत्तर दिए गए हैं। संपूर्ण पुस्तक में SI मात्रकों का उपयोग किया गया है । निर्धारित पाठ्यक्रम/पाठ्यचर्या के भाग के रूप में और साथ ही भौतिकी के लक्ष्य में सहायक के रूप में अध्याय 2 में "मात्रक और मापन" का विस्तृत विवरण दिया गया है । इस अध्याय में दिया गया एक 'बॉक्स' एक लंबी वक्रीय लाइन जैसी सरल वस्तु के मापन से कठिनाइयों को उजागर करता है। SI मूल मात्रकों एवं अन्य संबंधित मात्रकों की सारणी इस अध्याय में वर्तमान मान्य परिभाषाओं को मन में बैठाने तथा आज मापन में उपलब्ध शुद्धता की उच्चकोटि को स्पष्ट करने के लिए की गई है। यहाँ दी गई संख्याओं को न तो कंठस्थ करने की आवश्यकता है और न इन्हें परीक्षा में पूछना चाहिए।

विद्यार्थियों, अध्यापकों तथा आम जनता में यह धारणा है कि माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तर में तीक्ष्ण चढ़ाव है। परन्तु तनिक सोच दर्शाती है कि शिक्षा की वर्तमान व्यवस्था में ऐसा होगा ही। माध्यमिक स्तर तक की शिक्षा सामान्य शिक्षा है जहाँ विद्यार्थी को कई विषयों, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, गणित, भाषा का अध्ययन प्राथमिक स्तर का करना होता है। उच्चतर माध्यमिक या आगे की शिक्षा में, उद्यम के किसी

चुने क्षेत्र में व्यावसायिक दक्षता ग्रहण करना होता है। इसकी तुलना आप निम्न स्थिति से कर सकते हैं। बच्चे अपने घरों के अंदर या बाहर या गलियों में क्रिकेट या बैडमिंटन खेलते हैं। परन्तु उनमें से कुछ स्कूल टीम, फिर जिले की टीम, फिर राज्य टीम और राष्ट्रीय टीम तक पहुँचना चाहते हैं। प्रत्येक स्तर पर तीक्ष्ण चढ़ाव होगा ही। अधिक परिश्रम जरूरी होता है यदि विद्यार्थी विज्ञान, साहित्य, भाषा, संगीत, कला, वाणिज्य, अर्थप्रबन्ध, वास्तुकला के क्षेत्र में शिक्षा ग्रहण करना चाहते हैं या वे खिलाड़ी या फैशन डिज़ाइनर बनना चाहते हैं।

इस पुस्तक को पूर्ण कर पाना बहुत से व्यक्तियों की सहज स्वाभाविक एवं सतत् सहायता के कारण ही संभव हो सका है। पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति डा. आर.एच. रेबेगकर का अध्याय 4 में उनके बॉक्स विषय तथा डॉ. एफ.आई. सुर्वे का अध्याय 15 में उनके बॉक्स विषय के उपयोग की अनुमति के लिए आभारी है। विज्ञान शिक्षा में सुधार के लिए राष्ट्रीय प्रयासों के एक भाग के रूप में इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण का कार्य सौंपने के लिए हम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक के प्रति अपना आभार प्रकट करते हैं । परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष तथा संकाय के अन्य सदस्य इस उद्यम में सदैव ही हर संभव ढंग से हमारी सहायता के लिए तत्पर रहे, हम उनके भी अत्यंत अभारी हैं।

पुरानी पाठ्यपुस्तक को शिक्षकों, विद्यार्थियों तथा विशेषज्ञों का श्रेष्ठ विद्वतापूर्ण निवेश प्राप्त हुआ जिन्होंने पिछले कुछ वर्षो में परिमार्जन के लिए सुझाव दिए। हम उन सभी के कृतज्ञ हैं जिन्होंने एन.सी.ई.आर.टी. को अपने सुझाव भेजे। हम प्रथम पाण्डुलिपि पर चर्चा तथा परिमार्जन के लिए आयोजित समीक्षा कार्यगोष्ठी तथा सम्पादन कार्यगोष्ठी के सदस्यों के भी आभारी हैं। हम अध्यक्ष तथा उनके लेखन मंडल को उनके द्वारा 1988 में लिखी गई पाठ्यसामग्री के लिए धन्यवाद देते हैं जिसने 2002 संस्करण तथा जिसने हमें इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने का आधार तथा संदर्भ प्रदान किया। यदा–कदा पुरानी पुस्तकों के कुछ बड़े भागों को, विशेषकर जिन्हें विद्यार्थियों/शिक्षकों ने सराहा है, विद्यार्थियों की भावी पीढ़ी के हित को ध्यान में रखकर, प्रस्तुत पुस्तक में अपनाया/रूपांतरित किया है ।

हम अपने सम्मानित प्रयोक्ताओं, विशेषकर विद्यार्थियों तथा शिक्षकों से प्राप्त समीक्षा एवं सुझावों का आदर करते हैं । हम अपने युवा पाठकों की भौतिकी के रोमांचकारी कार्यक्षेत्र की ओर अग्रसर होने की कामना करते हैं ।

ए. डब्ल्यू. जोशी
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

अध्यापकों के लिए संदेश

पाठ्यचर्या को शिक्षार्थी-केंद्रित बनाने के लिए अति आवश्यक है कि विद्यार्थी अधिगम प्रक्रिया में सक्रिय रूप से भाग लें। प्रति सप्ताह या प्रति छः कक्षाओं पर एक बार इस तरह के सेमिनार और विचारों का आदान-प्रदान आयोजित होना चाहिए। भागीदारों के बीच परिचर्चा के लिए, इस पुस्तक में कुछ विशेष विषयों के संदर्भ में, कुछ सुझाव नीचे दिए गये हैं।

विद्यार्थियों को पाँच या छः के समूह में व्यवस्थित कीजिए। यदि आवश्यक हो, तो शिक्षण वर्ष में इन समूहों के सदस्यों में क्रमावर्तन करें।

परिचर्चा के विषय को बोर्ड पर या कागज पर लिखें। विद्यार्थियों को निर्देश दीजिए कि वे प्रश्नों के उत्तर या अपनी प्रतिक्रिया, जो भी अभीष्ट है, दिए हुए कागज पर लिखें। तत्पश्चात अपने समूह में चर्चा करें तथा इन पृष्ठों पर संशोधन या टिप्पणी जोड़ें। फिर इन सबकी उसी कक्षा में या किसी और कक्षा में परिचर्चा करें। विद्यार्थियों के उत्तर पृष्ठों का मूल्यांकन भी किया जा सकता है। प्रस्तुत पुस्तक से हम तीन सम्भावित विषयों को प्रस्तावित करते हैं। वास्तव में, प्रथम दो विषय, बहुत ही सामान्य हैं तथा पिछले चार या अधिक शताब्दियों के दौरान विज्ञान के विकास से सम्बन्धित हैं। प्रत्येक सेमिनार के लिए विद्यार्थी तथा अध्यापक, इस तरह के अन्य विषय को सुझा सकते हैं।

1. विचार जिसने सभ्यता को बदल दिया

मान लीजिए मानव जाति धीरे-धीरे विलुप्त हो रही है और आने वाली पीढ़ी या परकीय आगंतुक के लिए कोई संदेश छोड़ना है। प्रसिद्ध भौतिक विज्ञानी आर.पी. फाइनमैन आने वाली पीढ़ी के लिए निम्न संदेश छोड़ना चाहते थे :

''पदार्थ अणुओं से बना है''

एक महिला छात्रा तथा साहित्य की अध्यापिका निम्न संदेश छोड़ना चाहती थी :

''जल विद्यमान है, अतः मानव जाति का अस्तित्व रहेगा''

किसी अन्य व्यक्ति ने सोचा : ''गति के लिए पहिए का विचार''

आने वाली पीढ़ी के लिए आप में से प्रत्येक जो संदेश छोड़ना चाहेंगे उसे लिखें। तब अपने समूह में इस पर चर्चा करें, और इसमें परिवर्तन करें या इसमें और विचार जोड़ें, यदि आप अपना विचार बदलना चाहते हैं। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इससे संबंधित परिचर्चा में भाग लें।

2. न्यूनीकरण

गैस का अणुगति सिद्धान्त 'बड़े को छोटे से' या 'मैक्रो को माइक्रो' से संबंधित करता है। एक निकाय के रूप में गैस इसके अवयवों, अणुओं से संबंधित है। किसी निकाय को उसके अवयवों के गुणों से संबंधित करके वर्णित करना *न्यूनीकरण* कहलाता है। यह विधि व्यष्टि के साधारण एवं भविष्यवाची व्यवहार के आधार पर समूह के व्यवहार को स्पष्ट करती है। इस उपगमन में सूक्ष्मदर्शी गुणों एवं स्थूल प्रेक्षणों में एक परस्पर निर्भरता होती है। क्या यह विधि उपयोगी है? इस प्रकार के उपगमन की भौतिकी और रसायन विज्ञान के अतिरिक्त अन्य विषयों में अपनी सीमाएँ होती हैं – सम्भव है इन विषयों में भी सीमाएँ हों। किसी कैनवस पर बने चित्र को इसमें प्रयुक्त रसायनों के गुणों के समूह से संबंधित कर विवेचना *नहीं* की जा सकती है। वास्तविकता अवयवों के योग से कहीं परे है।

प्रश्न : क्या आप अन्य क्षेत्र बता सकते हैं जहाँ इस प्रकार के उपगमन को उपयोग में लाया जाता है?

किसी निकाय का संक्षेप में वर्णन कीजिए जिसका उसके अवयवों के पदों में पूर्ण रूप से विवेचना किया जा सके। एक अन्य निकाय का भी वर्णन कीजिए जिसमें ऐसा सम्भव नहीं है। अपने समूह के अन्य सदस्यों से इस पर विचार-विमर्श करें और अपने विचार लिखें। इसे अपने अध्यापक को दें तथा इस पर आयोजित परिचर्चा में भाग लें।

3. ऊष्मा का आण्विक उपगमन

आपके विचार से निम्न अवस्थाओं में क्या होगा, बताएँ।

कोई आवेष्टन एक सरंध्र दीवार से दो भागों में पृथक है। एक भाग नाइट्रोजन गैस (N_2) तथा दूसरा कार्बन डाइऑक्साइड (CO_2) से भरा है। गैसें एक भाग से दूसरे भाग में विसरित होती हैं।

प्रश्न 1 : दोनों गैसें एकसमान मात्रा में विसरित होंगी? यदि नहीं, तो कौन सी गैस अधिक विसरित होगी? कारण सहित बताइए।

प्रश्न 2 : क्या दाब एवं ताप अपरिवर्तित रहेंगे? यदि नहीं तो दोनों में क्या परिवर्तन होगा? कारण सहित बताइए।

अपने उत्तर लिखिए। समूह के अन्य सदस्यों के साथ विचार-विमर्श करें तथा उत्तर को परिष्कृत करें या टिप्पणी जोड़ें। उत्तर अध्यापक को दें तथा परिचर्चा में भाग लें।

विद्यार्थी तथा अध्यापक पाएँगे कि इस तरह के परिचर्चा तथा विचार-विमर्श, न केवल भौतिकी में, बल्कि विज्ञान तथा सामाजिक विज्ञान की समझ में हमें अत्यधिक सहायक होते हैं। इससे विद्यार्थियों की सोच में परिपक्वता आएगी।

विषय-सूची

अध्याय 5
कार्य, ऊर्जा और शक्ति

अध्याय 6
कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

अध्याय 7
गुरुत्वाकर्षण

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक [1]**[संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य]** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में**

व्यक्ति की गरिमा और [2]**[राष्ट्र की एकता**

और अखंडता] सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

---

1. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''प्रभुत्व-संपन्न लोकतंत्रात्मक गणराज्य'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।
2. संविधान (बयालीसवां संशोधन) अधिनियम, 1976 की धारा 2 द्वारा (3.1.1977 से) ''राष्ट्र की एकता'' के स्थान पर प्रतिस्थापित।

परिशिष्ट

परिशिष्ट A 1
ग्रीक वर्णमाला

एल्फा	A	α	न्यू	N	ν
बीटा	B	β	ज़ाई	Ξ	ξ
गामा	Γ	γ	ओमीक्रॉन	O	o
डेल्टा	Δ	δ	पाई	Π	π
एप्सिलॉन	E	ε	र्‌हो	P	ρ
जीटा	Z	ζ	सिग्मा	Σ	σ
ईटा	H	η	टॉअ	T	τ
थीटा	Θ	θ	अपसिलॉन	Y	υ
आयोटा	I	ι	फाइ	Φ	ϕ, φ
कप्पा	K	κ	काइ	X	χ
लैम्डा	Λ	λ	साइ	Ψ	ψ
म्यू	M	μ	ओमेगा	Ω	ω

परिशिष्ट A 2
सामान्य SI पूर्वलग्न तथा अपवर्त्यों और अपवर्तकों के प्रतीक

अपवर्त्य			अपवर्तक		
गुणक	**पूर्वलग्न**	**प्रतीक**	**गुणक**	**पूर्वलग्न**	**प्रतीक**
10^{18}	एक्जा	E	10^{-18}	एटो	a
10^{15}	पेटा	P	10^{-15}	फैम्टो	f
10^{12}	टेरा	T	10^{-12}	पीको	p
10^{9}	गीगा	G	10^{-9}	नैनो	n
10^{6}	मेगा	M	10^{-6}	माइक्रो	μ
10^{3}	किलो	k	10^{-3}	मिली	m
10^{2}	हेक्टो	h	10^{-2}	सेंटी	c
10^{1}	डेका	da	10^{-1}	डेसि	d

परिशिष्ट A 3

कुछ महत्त्वपूर्ण नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
निर्वात में प्रकाश की चाल	c	$2.9979 \times 10^{8}\,m\,s^{-1}$
इलेक्ट्रॉन का आवेश	e	$1.602 \times 10^{-19}\,C$
गुरुत्वीय नियतांक	G	$6.673 \times 10^{-11}\,N\,m^{2}kg^{-2}$
प्लांक नियतांक	h	$6.626 \times 10^{-34}\,J\,s$
बोल्ट्ज़मान नियतांक	k	$1.381 \times 10^{-23}\,J\,K^{-1}$
आवोगाद्रो संख्या	N_A	$6.022 \times 10^{23}\,mol^{-1}$
सार्वत्रिक गैस नियतांक	R	$8.314\,J\,mol^{-1}\,K^{-1}$
इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान	m_e	$9.110 \times 10^{-31}\,kg$
न्यूट्रॉन का द्रव्यमान	m_n	$1.675 \times 10^{-27}\,kg$
प्रोटॉन का द्रव्यमान	m_p	$1.673 \times 10^{-27}\,kg$
इलेक्ट्रॉन-आवेश व द्रव्यमान अनुपात	e/m_e	$1.759 \times 10^{11}\,C/kg$
फैराडे नियतांक	F	$9.648 \times 10^{4}\,C/mol$
रिडबर्ग नियतांक	R	$1.097 \times 10^{7}\,m^{-1}$
बोहर त्रिज्या	a_0	$5.292 \times 10^{-11}\,m$
स्टेफॉन-बोल्ट्ज़मान नियतांक	σ	$5.670 \times 10^{-8}\,W\,m^{-2}K^{-4}$
वीन नियतांक	b	$2.898 \times 10^{-3}\,m\,K$
मुक्त आकाश का परावैद्युतांक	ε_0 $1/4\pi\,\varepsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12}\,C^{2}N^{-1}m^{-2}$ $8.987 \times 10^{9}\,N\,m^{2}\,C^{-2}$
मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\,T\,m\,A^{-1}$ $\cong 1.257 \times 10^{-6}\,Wb\,A^{-1}m^{-1}$

अन्य उपयोगी नियतांक

नाम	प्रतीक	मान
ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक	J	$4.186\,J\,cal^{-1}$
मानक वायुमंडलीय दाब	1 atm	$1.013 \times 10^{5}\,Pa$
परम शून्य	0 K	–273.15 °C
इलेक्ट्रॉन वोल्ट	1 eV	$1.602 \times 10^{-19}\,J$
परमाण्वीय द्रव्यमान मात्रक	1 u	$1.661 \times 10^{-27}\,kg$
इलेक्ट्रॉन विराम ऊर्जा	mc^2	0.511 MeV
1u का ऊर्जा तुल्यांक	u c^2	931.5 MeV
आदर्श गैस का आयतन (0°C तथा 1 atm)	V	$22.4\,L\,mol^{-1}$
गुरुत्वीय त्वरण (समुद्र तल, विषुवत वृत्त पर)	g	$9.78049\,m\,s^{-2}$

परिशिष्ट A 4
रूपांतरण गुणक

सरलता के लिए रूपांतरण गुणकों को समीकरण के रूप में लिखा गया है।

लंबाई

1 km = 0.6215 mi

1mi = 1.609 km

1m = 1.0936 yd = 3.281 ft = 39.37 in

1 in = 2.54 cm

1 ft = 12 in = 30.48 cm

1 yd = 3ft = 91.44 cm

1 (light year) प्रकाश वर्ष = 1 ly = 9.461×10^{15}m

1 Å = 0.1nm

क्षेत्रफल

1 $m^2 = 10^4$ cm^2

1km^2 = 0.3861 mi^2 = 247.1 एकड़ (acres)

1 in^2 = 6.4516 cm^2

1ft^2 = 9.29×10^{-2} m^2

1 m^2 = 10.76 ft^2

1 एकड़ (acre) = 43,560 ft^2

1 mi^2 = 460 (acres) एकड़ = 2.590 km^2

आयतन

1m^3 = $10^6$$cm^3$

1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal = 3.786 L

1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3

1 in^3 = 16.39 cm^3

1ft^3 = 1728 in^3 = 28.32 L = 2.832×10^4 cm^3

चाल

1 km h^{-1} = 0.2778 m s^{-1} = 0.6215 mi h^{-1}

1mi h^{-1} = 0.4470 m s^{-1} = 1.609 km h^{-1}

1mi h^{-1} = 1.467 ft s^{-1}

चुंबकीय क्षेत्र

1 G = 10^{-4} T

1 T = 1 Wb m^{-2} = 10^4 G

कोण तथा कोणीय चाल

π rad = 180°

1 rad = 57.30°

1° = 1.745×10^{-2} rad

1 rev min^{-1} = 0.1047 rad s^{-1}

1 rad s^{-1} = 9.549 rev min^{-1}

द्रव्यमान

1 kg = 1000 g

1 टन (tonne) = 1000 kg = 1 Mg

1 u = 1.6606×10^{-27} kg

1 kg = 6.022×10^{26} u

1 स्लग (slug) = 14.59 kg

1 kg = 6.852×10^{-2} स्लग (slug)

1 u = 931.50 MeV/c^2

घनत्व

1 g cm^{-3} = 1000 kg m^{-3} = 1 kg L^{-1}

बल

1 N = 0.2248 lbf = 10^5 dyn

1 lbf = 4.4482 N

1 kgf = 2.2046 lbf

समय

1 h = 60 min = 3.6 ks

1 d = 24 h = 1440 min = 86.4 ks

1y = 365.24 d = 31.56 Ms

दाब

1 Pa = 1 N m^{-2}

1 bar = 100 kPa

1 atm = 101.325 kPa = 1.01325 bar

1atm = 14.7 lbf/in^2 = 760 mm Hg

= 29.9 in Hg = 33.8 ft H_2O

1 lbf in^{-2} = 6.895 kPa

1 torr = 1mm Hg = 133.32 Pa

ऊर्जा

1 kW h = 3.6 MJ

1 cal = 4.186 J

1 ft lbf = 1.356 J = 1.286×10^{-3} Btu

1 L atm = 101.325 J

1 L atm = 24.217 cal

1 Btu = 778 ft lb = 252 cal = 1054.35 J

1 eV = 1.602×10^{-19} J

1 u c^2 = 931.50 MeV

1 erg = 10^{-7} J

शक्ति

1 अश्वशक्ति (horse power, hp) = 550 ft lbf/s
= 745.7 W

1 Btu min^{-1} = 17.58 W

1 W = 1.341×10^{-3} hp
= 0.7376 ft lbf/s

ऊष्मा चालकता

1 W $\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ = 6.938 Btu in/hft^2 °F

1 Btu in/hft^2 °F = 0.1441 W/m K

परिशिष्ट A 5

गणितीय सूत्र

ज्यामिति

r त्रिज्या का वृत्त : परिधि $= 2\pi r$; क्षेत्रफल $= \pi r^2$

r त्रिज्या का गोला : क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$; आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

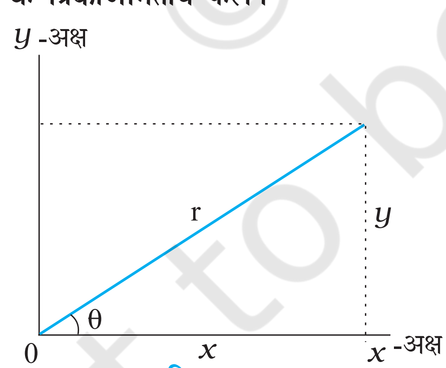
r त्रिज्या तथा h ऊँचाई का लंब वृत्तीय शंकु :
क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; आयतन $= \pi r^2 h$

a आधार तथा h शीर्षलंब का त्रिभुज : क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a h$

द्विघाती सूत्र

यदि $ax^2 + bx + c = 0$ है, तब $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

कोण θ के त्रिकोणमितीय फलन



चित्र A 5.1

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

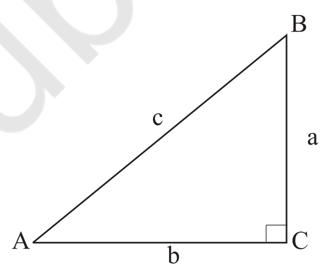
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \text{cosec}\,\theta = \dfrac{r}{y}$

पाइथागोरीय प्रमेय

इस समकोण त्रिभुज में,

$a^2 + b^2 = c^2$



चित्र A 5.2

त्रिभुज

A, B, C कोण हैं,

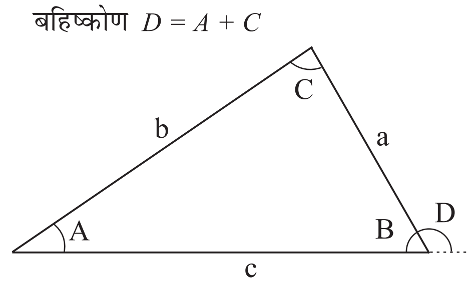
a, b, c सम्मुख भुजाएँ हैं,

कोण A + B + C = 180°

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

बहिष्कोण $D = A + C$



चित्र A 5.3

गणितीय चिह्न एवं प्रतीक

$=$ बराबर

$\cong$ सन्निकटतः बराबर

$\sim$ परिमाण की कोटि है

$\neq$ बराबर नहीं है

$\equiv$ के सर्वसम है, इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

$>$ अधिक है ($>>$ बहुत अधिक है)

$<$ कम है ($<<$ बहुत कम है)

$\geq$ अधिक है अथवा बराबर है (अथवा, कम नहीं है)

$\leq$ कम है अथवा बराबर है (अथवा, अधिक नहीं है)

$\pm$ धन अथवा ऋण

$\propto$ समानुपाती है

Σ का योग

$\bar{x}$ अथवा $<x>$ अथवा x_{av}, x का औसत मान

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

$\sin(90^{\circ} - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90^{\circ} - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$= 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\ \tan\beta}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

द्विपद प्रमेय

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + ...(x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + ...(x^2 < 1)$$

चरघातांकी प्रसरण

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

लघुगणकीय प्रसरण

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - .....\ (|x| < 1)$$

त्रिकोणमितीय प्रसरण

(θ रेडियनों में)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - .....$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - .....$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} - .....$$

सदिशों का गुणनफल

मान लीजिए $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ x-, y- तथा z- दिशाओं में एकांक सदिश हैं, तो

$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1,\ \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$

$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = 0,\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$

कोई सदिश **a** जिसके x-, y- तथा z-अक्ष के अनुदिश घटक a_x, a_y तथा a_z हैं, उन्हें इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

मान लीजिए **a, b** तथा **c** स्वेच्छ सदिश हैं, जिनके परिमाण a, b तथा c हैं, तब

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$

$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (s कोई अदिश है)

मान लीजिए **a** तथा **b** के बीच के दो कोणों में θ लघुतर कोण है, तब

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_y b_z - b_y a_z\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(a_z b_x - b_z a_x\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(a_x b_y - b_x a_y\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}.\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}.\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

परिशिष्ट A 6

A 6.1 SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त कुछ SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक	
	नाम	प्रतीक
क्षेत्रफल	वर्गमीटर	m^2
आयतन	घनमीटर	m^3
चाल, वेग	मीटर प्रति सेकंड	m/s या $m\ s^{-1}$
कोणीय वेग	रेडियन प्रति सेकंड	rad/s या $rad\ s^{-1}$
त्वरण	मीटर प्रतिवर्ग सेकंड	m/s^2 या $m\ s^{-2}$
कोणीय त्वरण	रेडियन प्रतिवर्ग सेकंड	rad/s^2 या $rad\ s^{-2}$
तरंग संख्या	प्रति मीटर	m^{-1}
घनत्व, द्रव्यमान घनत्व	किलोग्राम प्रति घनमीटर	kg/m^3 या $kg\ m^{-3}$
विद्युत् धारा घनत्व	ऐम्पियर प्रति वर्गमीटर	A/m^2 या $A\ m^{-2}$
चुंबकीय क्षेत्र की तीव्रता, चुंबकीय तीव्रता, चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	ऐम्पियर प्रति मीटर	A/m या $A\ m^{-1}$
सांद्रता (पदार्थ की मात्रा की)	मोल प्रति घनमीटर	mol/m^3 या $mol\ m^{-3}$
विशिष्ट आयतन	घन मीटर प्रति किलोग्राम	m^3/kg या $m^3\ kg^{-1}$
ज्योति-तीव्रता	कैंडेला प्रति वर्गमीटर	cd/m^2 या $cd\ m^{-2}$
शुद्धगतिक श्यानता	वर्गमीटर प्रति सेकंड	m^2/s या $m^2\ s^{-1}$
संवेग	किलोग्राम मीटर प्रति सेकंड	kg m/s या $kg\ m\ s^{-1}$
जड़त्व आघूर्ण	किलोग्राम वर्गमीटर	$kg\ m^2$
परिभ्रमण त्रिज्या	मीटर	m
रेखीय/क्षेत्रीय (पृष्ठीय)/आयतन प्रसरणीयता	प्रति केल्विन	K^{-1}
प्रवाह दर	घनमीटर प्रति सेकंड	m^3/s या $m^3\ s^{-1}$

A 6.2 विशेष नाम वाले SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक			
	नाम	प्रतीक	अन्य मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
आवृत्ति	हर्ट्ज	Hz	—	s^{-1}
बल	न्यूटन	N	—	kg m/s^2 या kg m s^{-2}
दाब, प्रतिबल	पास्कल	Pa	N/m^2 या N m^{-2}	kg $m^{-1}s^{-2}$ या kg/s^2m
कार्य, ऊर्जा, ऊष्मा की मात्रा	जूल	J	N m	kg m^2/s^2 या kg m^2 s^{-2}
शक्ति, विकिरण फलक्स	वाट	W	J/s या J s^{-1}	kg m^2/s^3 या kg m^2s^{-3}
विद्युत आवेश	कूलॉम	C	—	A s
विद्युत विभव, विभवान्तर, विद्युतवाहक बल	वोल्ट	V	W/A या W A^{-1}	kg m^2/s^3A या kg $m^2s^{-3}A^{-1}$
धारिता	फैरड	F	C/V या C V^{-1}	A^2s^4/kg m^2 या kg^{-1} $m^{-2}s^4A^2$
विद्युत प्रतिरोध	ओम	Ω	V/A या VA^{-1}	kg m^2/s^3A^2 या kg m^2 $s^{-3}A^{-2}$
विद्युत चालकता	सीमेन्स	S	A/V या VA^{-1}	s^3A^2/kg m^2 या $kg^{-1}m^{-2}$ s^3 A^2
चुंबकीय अभिवाह	वेबर	Wb	V s या (J/A या JA^{-1})	kg m^2/s^2A या kg m^2 $s^{-2}A^{-1}$
चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	टेस्ला	T	Wb/m^2 या Wb m^{-2}	kg/s^2A या kg $s^{-2}A^{-1}$
प्रेरकत्व	हेनरी	H	Wb /A या Wb A^{-1}	kg m^2/s^2A^2 या kg m^2 s^{-2} A^{-2}
ज्योति फलक्स, दीप्त शक्ति	ल्यूमेन	lm	—	cd/sr या cd sr^{-1}
प्रदीप्त घनत्व	लक्स	lx	lm/m^2 या lm m^{-2}	cd/sr m^2 या m^{-2} cd sr^{-1}
सक्रियता (रेडियो न्यूक्लाइड/रेडियोएक्टिव स्रोत की)	बेकेरल	Bq	—	s^{-1}
अवशोषित मात्रा, अवशोषित मात्रा सूचकांक	ग्रे	Gy	J/kg या J kg^{-1}	m^2/s^2 या m^2 s^{-2}

A 6.3 विशेष नाम वाले SI मात्रकों के पदों में व्यक्त SI व्युत्पन्न मात्रक

भौतिक राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	SI मूल मात्रकों के पदों में व्युत्पन्न मात्रक
चुंबकीय आघूर्ण	जूल प्रति टेस्ला	$J\ T^{-1}$	$m^2\ A$
द्विध्रुव आघूर्ण	कूलॉम मीटर	C m	m A s
गतिक श्यानता	पायसल अथवा पास्कल सेकंड अथवा न्यूटन सेकंड प्रति वर्ग मीटर	Pl या Pa s या $N\ s\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$
युग्म, बल आघूर्ण	न्यूटन मीटर	N m	$kg\ m^2\ s^{-1}$
पृष्ठ तनाव	न्यूटन प्रति मीटर	N/m या $N\ m^{-1}$	$kg\ s^{-2}$
शक्ति घनत्व, किरणीत मान, ऊष्मीय फ्लक्स घनत्व	वाट प्रति वर्ग मीटर	W/m^2	$kg\ s^{-3}$
ऊष्मा धारिता, एन्ट्रॉपी	जूल प्रति केल्विन	J/K	$kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
विशिष्ट ऊष्मा, विशिष्ट एन्ट्रॉपी	जूल प्रति किलोग्राम केल्विन	J/kg K	$m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
विशिष्ट ऊर्जा, गुप्त ऊष्मा	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या $J\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$
विकिरण तीव्रता	वाट प्रति स्टिरेडियन	W/sr या $W\ sr^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-3}\ sr^{-1}$
ऊष्मीय चालकता	वाट प्रति मीटर केल्विन	W/m K या $W\ m^{-1}K^{-1}$	$kg\ m\ s^{-3}\ K^{-1}$
ऊर्जा घनत्व	जूल प्रति घन मीटर	J/m^3 या $J\ m^{-3}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
विद्युत क्षेत्र तीव्रता	वोल्ट प्रति मीटर	V/m या $V\ m^{-1}$	$kg\ m\ s^3 A^{-1}$
विद्युत आवेश घनत्व	कूलॉम प्रति घन मीटर	C/m^3 या $C\ m^{-3}$	$m^{-3}\ s\ A$
विद्युत फ्लक्स घनत्व	कूलॉम प्रति वर्ग मीटर	C/m^2 या $C\ m^{-2}$	$m^{-2}\ s\ A$
परावैद्युतांक	फैरड प्रति मीटर	F/m या $F\ m^{-1}$	$kg^{-1}m^{-3}\ s^4A^2$
चुंबकशीलता	हेनरी प्रति मीटर	H/m या $H\ m^{-1}$	$kg\ m\ s^{-2}\ A^{-2}$
मोलर ऊर्जा	जूल प्रति मोल	J/mol या $J\ mol^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ mol^{-1}$
कोणीय संवेग, प्लांक नियतांक	जूल सेकंड	J s	$kg\ m^2\ s^{-1}$
मोलर एन्ट्रॉपी, मोलर ऊष्मा धारिता	जूल प्रति मोल केल्विन	J/mol K या $J\ mol^{-1}K^{-1}$	$kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}\ mol^{-1}$
उद्भासन (exposure) (X-तथा γ-किरणें)	कूलॉम प्रति किलोग्राम ग्रे प्रति सेकंड	C/kg या $C\ kg^{-1}$ Gy/s या $Gy\ s^{-1}$	$kg^{-1}\ s\ A$ $m^2\ s^{-3}$
संपीड्यता	प्रति पास्कल	Pa^{-1}	$kg^{-1}\ m\ s^2$
प्रत्यास्थता गुणांक	न्यूटन प्रति वर्गमीटर	N/m^2 या $N\ m^{-2}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
दाब प्रवणता	पास्कल प्रति मीटर	Pa/m या $N\ m^{-3}$	$kg\ m^{-2}\ s^{-2}$
पृष्ठ विभव	जूल प्रति किलोग्राम	J/kg या $J\ kg^{-1}$; N m/kg या $N\ m\ kg^{-1}$	$m^2\ s^{-2}$
दाब ऊर्जा	पास्कल घन मीटर	$Pa\ m^3$ या N m	$kg\ m^2\ s^{-2}$
आवेग	न्यूटन सेकंड	N s	$kg\ m\ s^{-1}$
कोणीय आवेग	न्यूटन मीटर सेकंड	Nm s	$kg\ m^2\ s^{-1}$
विशिष्ट प्रतिरोध	ओम मीटर	Ω m	$kg\ m^3\ s^{-3}\ A^{-2}$
पृष्ठ ऊर्जा	जूल प्रति वर्गमीटर	J/m^2 या $J\ m^{-2}$; N/m या $N\ m^{-1}$	$kg\ s^{-2}$

परिशिष्ट A 7
भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों तथा न्यूक्लाइडों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों को प्रतीक रूप में सामान्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के किसी अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इन्हें तिरछे (अथवा ढालू) टाइप में छपवाया जाता है। तथापि जिस राशि के लिए दो अक्षरीय प्रतीक आवश्यक हों तो उन्हें दो प्रतीकों के गुणनफल के रूप में दर्शाना होता है, पर इन प्रतीकों को पृथक् दर्शाने के लिए कुछ स्थान छोड़ना आवश्यक होता है।
- नामों अथवा व्यंजकों के संक्षिप्त रूपों, जैसे—potential energy के लिए p.e. का उपयोग भौतिक समीकरणों में नहीं किया जाता । पाठ्य सामग्री में इन संक्षिप्त रूपों को साधारण रोमन (सीधे) टाइप में छपवाया जाता है ।
- सदिश राशियों को मोटे टाइप में तथा सीधे छपवाया जाता है । तथापि कक्षा में सदिश राशियों को प्रतीक के शीर्ष पर तीर द्वारा निर्दिष्ट किया जा सकता है ।
- दो भौतिक राशियों के गुणनफल को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है। एक भौतिक राशि को दूसरी भौतिक राशि से विभाजित करना एक क्षैतिज दंड खींचकर अथवा सॉलिडस (अथवा तिरछी रेखा /) के साथ निर्दिष्ट किया जा सकता है; अथवा अंश तथा हर के प्रथम घात के व्युत्क्रम के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है (इस गुणनफल में अंश तथा हर में स्पष्ट पहचान के लिए उचित स्थानों पर कोष्ठकों का उपयोग किया जाता है)।
- रासायनिक तत्वों के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में लिखा जाता है । प्रतीक के अंत में विराम चिह्न अथवा बिंदु (.) नहीं लगाया जाता ।

  उदाहरण के लिए, Ca, C, H, He, U, आदि ।
- किसी न्यूक्लाइड से जुड़े अंकों का उल्लेख उन्हें बाएं अधोलिखित (परमाणु क्रमांक) तथा बाएं उपरिलिखित (द्रव्यमान संख्या) के रूप में लिखकर किया जाता है ।

  उदाहरण के लिए, U-235 न्यूक्लाइड को $^{235}_{92}\mathrm{U}$ लिखकर व्यक्त किया जाता है (यहां 235 द्रव्यमान संख्या तथा 92 परमाणु क्रमांक को व्यक्त करता है तथा U यूरेनियम का रासायनिक प्रतीक है)।
- यदि आवश्यक हो, तो दाईं उपरिलिखित स्थिति का उपयोग आयनीकरण की अवस्था (आयनों के प्रकरण में) निर्दिष्ट करने के लिए किया जाता है ।

  उदाहरण के लिए, Ca^{2+}, PO_4^{3-}

परिशिष्ट A 8
SI मात्रकों, कुछ अन्य मात्रकों तथा SI पूर्वलग्नों के प्रतीकों के उपयोग के लिए सामान्य मार्गदर्शन

- भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीकों को रोमन (सीधे टाइप) में छापा/लिखा जाता है।
- मात्रकों के मानक तथा अनुमोदित प्रतीकों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से आरंभ करके रोमन (सीधे टाइप) में लिखा जाता है। मात्रकों के लघु उल्लेखों, जैसे kg, m, s, cd आदि को प्रतीकों के रूप में लिखा जाता है, संक्षिप्त रूप में नहीं। मात्रकों के नाम को कभी भी बड़े अक्षरों में नहीं लिखते। तथापि, मात्रक के प्रतीक को केवल तभी बड़े अक्षर में लिखा जाता है, जब मात्रक के प्रतीक को किसी वैज्ञानिक के नाम से व्युत्पन्न किया गया हो, ऐसी स्थिति में मात्रक का आरंभ बड़े रोमन अक्षर से किया जाता है।

  उदाहरण के लिए : मात्रक मीटर ('metre') के लिए 'm', "दिन" ("day") के लिए d, मात्रक वायुमंडलीय दाब ('atmospheric pressure') के लिए atm, मात्रक हर्ट्ज़ ('hertz') के लिए Hz, मात्रक वेबर ('weber') के लिए Wb, मात्रक जूल ('joule') के लिए J, मात्रक ऐम्पियर ('ampere') के लिए A, मात्रक वोल्ट ('volt') के लिए V, आदि का प्रयोग प्रतीकों के रूप में किया जाता है। इसका केवल एक ही अपवाद है L, जो कि मात्रक लीटर (litre) का प्रतीक है। ऐसा अरबी संख्यांक 1 तथा लोअर केस रोमन के अक्षर l को छापने अथवा लिखने में होने वाली भ्रांति से बचने के लिए किया गया है।

- मात्रकों के प्रतीकों को उनके लिए अनुमोदित अक्षरों में लिखने के पश्चात् उनके अंत में पूर्ण विराम नहीं लगाया जाता तथा मात्रकों के प्रतीकों को केवल एकवचन में ही लिखा जाता है बहुवचन में नहीं, अर्थात् किसी मात्रक का प्रतीक बहुवचन में अपरिवर्तित रहता है।
  उदाहरण के लिए : लंबाई 25 सेंटीमीटर (centimetres) के लिए मात्रक का प्रतीक 25 cm के रूप में लिखा जाता है, 25 cms अथवा 25 cm. अथवा 25 cms., आदि नहीं लिखा जाता।
- सॉलिडस (solidus) अर्थात् (/) के उपयोग का अनुमोदन केवल एक अक्षर के मात्रक प्रतीक के अन्य मात्रक प्रतीक द्वारा विभाजन का संकेतन करने के लिए किया गया है। एक से अधिक सॉलिडस का उपयोग नहीं किया जाता।
  उदाहरण के लिए, m/s^2 अथवा $m\ s^{-2}$ (m तथा s^{-2} के बीच कुछ स्थान छोड़ते हुए) लिख सकते हैं परंतु m/s/s नहीं;
  $1\ Pl = 1\ N\ s\ m^{-2} = 1\ N\ s/m^2 = 1\ kg/s\ m = 1\ kg\ m^{-1}s^{-1}$ परंतु 1 kg/m/s नहीं;
  J/K mol अथवा $J\ K^{-1}\ mol^{-1}$, परंतु J/K/mol नहीं; आदि।
- पूर्वलग्न के प्रतीकों को रोमन (सीधे) टाइप में छापा जाता है तथा पूर्वलग्न के प्रतीक तथा मात्रक के प्रतीक के बीच कोई स्थान नहीं छोड़ा जाता। इस प्रकार मात्रक प्रतीकों के बहुत निकट लिखी कुछ दशमलव भिन्न या गुणज, जब वे इतने छोटे हों या बड़े हों, कि उनका लिखना असुविधाजनक हो तो उनको लिखने के लिए कुछ मान्य पूर्वलग्नों का उपयोग किया जाता है।
  उदाहरण के लिए :
  मेगावाट ($1\ MW = 10^6 W$); नेनो सेकंड ($1\ ns = 10^{-9} s$);
  सेंटीमीटर ($1\ cm = 10^{-2} m$); पीकोफैरड ($1\ pF = 10^{-12} F$);
  किलोमीटर ($1\ km = 10^3 m$); माइक्रोसेकंड ($1\ \mu s = 10^{-6} s$);
  मिलीवोल्ट ($1\ mV = 10^{-3} V$); गीगा हर्ट्ज़ ($1\ GHz = 10^9\ Hz$);
  किलोवाट-घंटा ($1\ kWh) = 10^3\ Wh = 3.6\ MJ = 3.6 \times 10^6 J$);
  माइक्रो ऐम्पियर ($1\ \mu A = 10^{-6} A$); माइक्रॉन ($1\ \mu m = 10^{-6} m$)
  एंगस्ट्रॉम ($1 Å = 0.1\ nm = 10^{-10} m$); आदि।
  मात्रक 'माइक्रॉन' जो कि 10^{-6} m अर्थात् 1 माइक्रो मीटर के बराबर है, मात्र एक नाम है जो मीटर के अपवर्तक को सुविधाजनक बनाने के लिए है। इसी प्रकार मात्रक फर्मी ('fermi') जो फेम्टोमीटर अथवा 10^{-15} m के बराबर है, का उपयोग नाभिकीय अध्ययनों में लंबाई के सुविधाजनक मात्रक की भांति किया जाता है। इसी प्रकार, एक अन्य मात्रक "बार्न" (barn) जो $10^{-28} m^2$ के बराबर है, का उपयोग अवपरामाण्विक कण संघट्टों में अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफलों की मापों के सुविधाजनक मात्रक के रूप में किया जाता है। तथापि 'माइक्रॉन' मात्रक को "micrometre" की तुलना में प्राथमिकता दी जाती है। इसका कारण 'micrometre' मात्रक तथा "micrometer" जो कि लंबाई मापने का यंत्र है, के बीच भ्रांति से बचना है। SI मात्रकों मीटर तथा सेकंड के ये नए बने अपवर्त्य तथा अपवर्तक (cm, km, μm, μs, ns) इन मात्रकों के नए संयुक्त, अपृथक्करणीय प्रतीकों का निर्माण करते हैं।
- जब कोई पूर्वलग्न किसी मात्रक के प्रतीक से पहले लगाया जाता है, तो पूर्वलग्न तथा प्रतीक का संयोजन उस मात्रक का एक नया प्रतीक माना जाता है, जिस पर कोष्ठक का उपयोग किए बिना ही कोई धनात्मक अथवा ऋणात्मक घात लगाई जा सकती है। इन्हें अन्य मात्रकों के प्रतीकों के साथ संयोजित करके संयुक्त मात्रक बनाए जा सकते हैं। घातांकों के बंधन के नियम साधारण बीजगणित की भांति नहीं होते।
  उदाहरण के लिए:
  cm^3 का सदैव अर्थ $(cm)^3 = (0.01\ m)^3 = (10^{-2} m)^3 = 10^{-6} m^3$, परंतु $0.01\ m^3$ अथवा $10^{-2} m^3$ अथवा $1\ c\ m^3$ (यहां पूर्वलग्न c तथा m^3 के बीच स्थान अर्थहीन है, क्योंकि पूर्वलग्न को मात्रक के प्रतीक के साथ जोड़ा जाना है। किसी पूर्वलग्न का कोई भौतिक महत्त्व अथवा अपना स्वतंत्र अस्तित्व नहीं होता जब तक कि उसे किसी मात्रक के प्रतीक से जोड़ा न जाए)। इसी प्रकार, mA^2 का सदैव ही अर्थ है $(mA)^2 = (0.001\ A)^2 = (10^{-3} A)^2 = 10^{-6} A^2$, परंतु $0.001\ A^2$ अथवा mA^2 कभी नहीं।
  $1\ cm^{-1} = (10^{-2} m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$ परंतु $1\ cm^{-1}$ अथवा $10^{-2}\ m^{-1}$ कभी नहीं;
  $1\ \mu s^{-1}$ का सदैव अर्थ है $(10^{-6}\ s)^{-1} = 10^6\ s^{-1}$, परंतु $1 \times 10^{-6}\ s^{-1}$ नहीं;

1 km^3 का सदैव अर्थ है (km)^2 = (10^3 m)^2 = 10^6 m^2, परंतु 10^3 m^2 कभी नहीं;

1 mm^2 का सदैव अर्थ है (mm)^2 = (10^{-3} m)^2 = 10^{-6} m^2 परंतु 10^{-3} m^2 कभी नहीं, आदि ।

- किसी पूर्वलग्न का अकेले उपयोग नहीं होता । इसे सदैव ही किसी मात्रक के प्रतीक के साथ संलग्न किया जाता है तथा इसे मात्रक के प्रतीक से पहले (पूर्व-लग्न) लिखा अथवा लगाया जाता है ।

  उदाहरण के लिए :

  10^3/m^3 का अर्थ 1000/m^3 अथवा 1000 m^{-3} परंतु k/m^3 अथवा k m^{-3} नहीं;

  10^6/m^3 का अर्थ है 10,00,000/m^3 अथवा 10,00,000 m^{-3} परंतु M/m^3 अथवा M m^{-3} नहीं।

- पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ बीच में बिना कोई स्थान छोड़े लिखा जाता है, जबकि मात्रकों को आपस में गुणा करते समय मात्रकों के प्रतीकों को पृथक्-पृथक् उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा जाता है ।

  उदाहरण के लिए :

  m s^{-1} (प्रतीक m तथा s^{-1} लोअर केस में, छोटे अक्षर m तथा s पृथक् तथा स्वतंत्र मात्रक-प्रतीक हैं जिनमें m मीटर के लिए तथा s सेकंड के लिए है तथा उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर लिखा गया है) का अर्थ है मीटर प्रति सेकंड परंतु "मिली प्रति सेकंड" नहीं ।

  इसी प्रकार, ms^{-1} [प्रतीक m तथा s एक-दूसरे के बहुत पास-पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा लोअर केस में छोटे अक्षर के साथ मात्रक प्रतीक s (मात्रक 'सेकंड' के लिए) बीच में बिना कोई स्थान छोड़े ms को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ है "प्रति मिली सेकंड" परंतु "मीटर प्रति सेकंड" कभी नहीं ।

  mS^{-1} [प्रतीक m तथा S एक-दूसरे के बहुत पास सटाकर लिखे गए हैं, जिनमें पूर्वलग्न-प्रतीक m (पूर्वलग्न 'मिली' के लिए) तथा मात्रक-प्रतीक S बड़े रोमन अक्षर S मात्रक साइमेंस (siemens) के लिए बीच में बिना कोई स्थान छोड़े mS को एक नया संयुक्त मात्रक बनाकर] का अर्थ 'प्रति मिली-साइमेंस' है, परंतु 'प्रति मिली सेकंड' कदापि नहीं है ।

  C m [प्रतीक C तथा m पृथक्-पृथक् लिखे गए हैं, जो मात्रक प्रतीकों C (मात्रक कूलॉम के लिए) तथा m (मात्रक मीटर के लिए) को उनके बीच कुछ स्थान छोड़कर निरूपित करते हैं ।] का अर्थ "कूलॉम मीटर" है, परंतु सेंटीमीटर कदापि नहीं, आदि ।

- जब तक एक पूर्वलग्न उपलब्ध है, दुहरे पूर्वलग्नों का उपयोग वर्जित है ।

  उदाहरण के लिए :

  10^{-9} m = 1 nm (नैनोमीटर) है, परंतु 1 mμm (मिलीमाइक्रोमीटर) नहीं है ।

  10^{-6} m = 1 μm (माइक्रॉन) है, परंतु 1 mmm (मिलीमिलीमीटर) नहीं है ।

  10^{-12} F = 1 pF (पीको फैरड) है, परंतु 1 $\mu\mu$F (माइक्रोमाइक्रो फैरड) नहीं है ।

  10^9 W = 1 GW (गीगावाट) है, परंतु 1 kMW (किलोमेगावाट) नहीं है, आदि ।

- जब कोई भौतिक राशि दो या अधिक मात्रकों के संयोजन द्वारा व्यक्त की जाती है, तब मात्रक तथा मात्रकों के प्रतीकों के किसी संयोजन के उपयोग को वर्जित माना जाता है ।

  उदाहरण के लिए :

  जूल प्रति मोल केल्विन को J/mol K अथवा J mol^{-1} K^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/mole K अथवा J/mol kelvin अथवा J/mole K, आदि नहीं लिखते ।

  जूल प्रति टेसला को J/T अथवा JT^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु joule/T अथवा J per tesla अथवा J/tesla, आदि नहीं लिखते ।

  न्यूटन मीटर सेकंड को N m s के रूप में लिखा जाता है, परंतु newton m second अथवा N m second अथवा N metre s अथवा newton metre s नहीं लिखते ।

  जूल प्रति किलोग्राम केल्विन को J/kg K अथवा J kg^{-1} K^{-1} के रूप में लिखा जाता है, परंतु J/kilog K अथवा joule/kg K अथवा J/kg kelvin अथवा J/kilogram K आदि नहीं लिखते ।

- परिकलन की सुविधा के लिए, पूर्वलग्न के प्रतीक को मात्रक के प्रतीक के साथ अंश में लगाया जाता है हर में नहीं। उदाहरण के लिए :
  10^6 N/m^2 को 1 N/mm^2 लिखने की अपेक्षा MN/m^2 के रूप में लिखा जाना अधिक सुविधाजनक है।
  उन संख्याओं जिनमें अपवर्त्यों अथवा अपवर्तकों जिनमें 1000 के गुणक सम्मिलित हों, वहाँ इन संख्याओं को $10^{\pm 3n}$ (जहाँ n पूर्णांक है) के रूप में लिखने को प्राथमिकता दी जाती है।
- उन प्रकरणों में अत्यंत सावधानी की आवश्यकता होती है जिनमें भौतिक राशियों तथा भौतिक राशियों के मात्रकों के प्रतीक समान होते हैं।
  उदाहरण के लिए :
  भौतिक राशि भार (W) को द्रव्यमान (m) तथा गुरुत्वीय त्वरण (g) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसे प्रतीकों के पदों में तिरछे टाइप में $W = m\ g$ के रूप में छापा जाता है तथा लिखते समय m तथा g के बीच कुछ स्थान छोड़ देते हैं। इसे मात्रकों watt (W), metre (m), तथा gram (g) के मात्रक प्रतीकों के साथ भ्रम में नहीं पड़ना चाहिए। तथापि, समीकरण $W = mg$ में, प्रतीक W भार को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक J है; m द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक kg है तथा g गुरुत्वीय त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक m s^{-2} है।
  इसी प्रकार, समीकरण $F = m\ a$ में प्रतीक F बल को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक N है, m द्रव्यमान को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक kg है तथा a त्वरण को व्यक्त करता है जिसका मात्रक-प्रतीक m s^{-2} है। भौतिक राशियों के इन प्रतीकों को मात्रकों "farad" (F), metre (m) तथा "are" (a) के साथ भ्रमित नहीं होना चाहिए।
  प्रतीकों h [पूर्वलग्न हेक्टो (hecto) तथा मात्रक घंटा (hour)], c [पूर्वलग्न सेंटी (centi) तथा मात्रक कैरट ("carat")], d [पूर्वलग्न डेसी (deci) तथा मात्रक दिन (day)], T (पूर्वलग्न टेरा (tera) तथा मात्रक टेसला (tesla), a [पूर्वलग्न एट्टो (atto) तथा मात्रक ऑर (are)], da [पूर्वलग्न डेका (deca) तथा मात्रक डेसिऑर (deciare)] आदि का उपयोग करते समय यथोचित भिन्नता दर्शानी चाहिए।
- मात्रकों की S I प्रणाली का द्रव्यमान का मूल मात्रक "किलोग्राम" मात्रकों की CGS प्रणाली के द्रव्यमान के मूल मात्रक 'ग्राम' के साथ S I पूर्वलग्न 'किलो' (एक गुणज जो 10^3 के बराबर है) को जोड़कर बनता है, जो देखने में असामान्य-सा प्रतीत होता है। इस प्रकार, जबकि हम लंबाई के मात्रक (मीटर अथवा metre) के एक हज़ारवें भाग को मिलीमीटर (mm) लिखते हैं, द्रव्यमान के मात्रक (किलोग्राम अथवा kilogram अथवा kg) के एक हज़ारवें भाग को मिलीकिलोग्राम नहीं लिखते, वरन् केवल ग्राम लिखते हैं। ऐसी विषम परिस्थिति उत्पन्न होने का कारण यह है कि हम द्रव्यमान के मात्रक 'किलोग्राम' के स्थान पर अन्य कोई उपयुक्त मात्रक प्रतिस्थापित नहीं कर सके। अतः एक अपवाद के रूप में द्रव्यमान के मात्रक के साथ अपवर्त्य तथा अपवर्तकों के नाम 'ग्राम' के साथ पूर्वलग्न लगाकर बनाए जाते हैं 'किलोग्राम' के साथ नहीं।
  उदाहरण के लिए :
  10^3 kg = 1 मेगाग्राम (1 Mg), परंतु 1 किलो किलोग्राम (1 kkg) नहीं;
  10^{-6} kg = 1 मिलीग्राम (1 mg), परंतु 1 माइक्रोकिलोग्राम (1 μkg) नहीं;
  10^{-3} kg = 1 ग्राम (1 g), परंतु 1 मिलीकिलोग्राम (1 mkg) नहीं; आदि।
  यह पुनः ध्यान देने की बात है कि आपको केवल अंतर्राष्ट्रीय मान्यता प्राप्त एवं अनुमोदित प्रतीकों का ही उपयोग करना चाहिए। यदि आप अपने सामान्य व्यवहार में मात्रकों के प्रतीकों का सामान्य नियमों एवं मार्गदर्शनों के अनुसार निरंतर उपयोग करेंगे, तो आप S I मात्रकों, पूर्वलग्नों तथा भौतिक राशियों और उनसे संबद्ध प्रतीकों के उचित परिप्रेक्ष्य में उपयोग करने में प्रवीण हो जाएंगे।

परिशिष्ट A 9
भौतिक राशियों के विमीय सूत्र

क्रम संख्या	भौतिक राशि	अन्य भौतिक राशियों से संबंध	विमाएँ	विमीय सूत्र
1.	क्षेत्रफल	लंबाई × चौड़ाई	$[L^2]$	$[M^0 L^2 T^0]$
2.	आयतन	लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई	$[L^3]$	$[M^0 L^3 T^0]$
3.	द्रव्यमान घनत्व	द्रव्यमान/आयतन	$[M]/[L^3]$ या $[M L^{-3}]$	$[M L^{-3} T^0]$
4.	आवृत्ति	1/आवर्तकाल	$1/[T]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
5.	वेग, चाल	विस्थापन/समय	$[L]/[T]$	$[M^0 L T^{-1}]$
6.	त्वरण	वेग/समय	$[LT^{-1}]/[T]$	$[M^0 LT^{-2}]$
7.	बल	द्रव्यमान × त्वरण	$[M][L T^{-2}]$	$[M L T^{-2}]$
8.	आवेग	बल × समय	$[M LT^{-2}] [T]$	$[M L T^{-1}]$
9.	कार्य, ऊर्जा	बल × दूरी	$[MLT^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
10.	शक्ति	कार्य/समय	$[ML^2 T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
11.	संवेग	द्रव्यमान × वेग	$[M][LT^{-1}]$	$[M L T^{-1}]$
12.	दाब, प्रतिबल	बल/क्षेत्रफल	$[MLT^{-2}]/[L^2]$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
13.	विकृति	विमा में परिवर्तन/मूल विमा	$[L]/[L]$ या $[L^3]/[L^3]$	$[M^0 L^0 T^0]$
14.	प्रत्यास्थता गुणांक	प्रतिबल/विकृति	$\dfrac{[M L^{-1} T^{-2}]}{[M^0 L^0 T^0]}$	$[M L^{-1} T^{-2}]$
15.	पृष्ठ तनाव	बल/लंबाई	$[M L T^{-2}]/[L]$	$[M L^0 T^{-2}]$
16.	पृष्ठ ऊर्जा	ऊर्जा/क्षेत्रफल	$[M L^2 T^{-2}]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-2}]$
17.	वेग प्रवणता	वेग/दूरी	$[L T^{-1}]/[L]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
18.	दाब प्रवणता	दाब/दूरी	$[ML^{-1} T^{-2}]/[L]$	$[M L^{-2} T^{-2}]$
19.	दाब ऊर्जा	दाब × आयतन	$[ML^{-1} T^{-2}][L^3]$	$[M L^2 T^{-2}]$
20.	श्यानता गुणांक	बल/(क्षेत्रफल × वेग प्रवणता)	$\dfrac{[M L T^{-2}]}{[L^2][LT^{-1}/L]}$	$[M L^{-1} T^{-1}]$
21.	कोण, कोणीय विस्थापन	चाप/त्रिज्या	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0 T^0]$
22.	त्रिकोणमितीय अनुपात ($\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ आदि)	लंबाई/लंबाई	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0 T^0]$
23.	कोणीय वेग	कोण/समय	$[L^0]/[T]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
24.	कोणीय त्वरण	कोणीय वेग/समय	$[L^0]/[T^2]$	$[M^0 L^0 T^{-2}]$
25.	परिभ्रमण त्रिज्या	दूरी	$[L]$	$[M^0 L T^0]$
26.	जड़त्व आघूर्ण	द्रव्यमान × (परिभ्रमण त्रिज्या)^2	$[M][L^2]$	$[M L^2 T^0]$
27.	कोणीय संवेग	जड़त्व आघूर्ण × कोणीय वेग	$[ML^2][T^{-1}]$	$[M L^2 T^{-1}]$
28.	बल-आघूर्ण, बलयुग्म का आघूर्ण	बल × दूरी	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$

29.	बल-आघूर्ण (ऐंठन)	कोणीय संवेग/समय अथवा बल × दूरी	$[ML^2 T^{-1}]/[T]$ अथवा $[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
30.	कोणीय आवृत्ति	2π × आवृत्ति	$[T^{-1}]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
31.	तरंगदैर्घ्य	दूरी	$[L]$	$[M^0 L T^0]$
32.	हबल नियतांक	पश्च सरण चाल/दूरी	$[L T^{-1}]/[L]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
33.	तरंग की तीव्रता	(ऊर्जा/समय)/क्षेत्रफल	$[ML^2 T^{-2}/T]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-3}]$
34.	विकिरण दाब	तरंग की तीव्रता/प्रकाश की चाल	$[MT^{-3}]/[LT^{-1}]$	$[M L^{-1}T^{-2}]$
35.	ऊर्जा घनत्व	ऊर्जा/आयतन	$[M L^2 T^{-2}]/[L^3]$	$[M L^{-1}T^{-2}]$
36.	क्रांतिक वेग	$\dfrac{\text{रेनॉल्ड संख्या} \times \text{श्यानता गुणांक}}{\text{द्रव्यमान घनत्व} \times \text{त्रिज्या}}$	$\dfrac{[M^0 L^0 T^0][ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}][L]}$	$[M^0 LT^{-1}]$
37.	पलायन वेग	(2 × गुरुत्वीय त्वरण × पृथ्वी की त्रिज्या)^{½}	$[LT^{-2}]^{½} \times [L]^{½}$	$[M^0 LT^{-1}]$
38.	ऊष्मीय ऊर्जा, आंतरिक ऊर्जा	कार्य (= बल × दूरी)	$[M L T^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
39.	गतिज ऊर्जा	½ × द्रव्यमान × (वेग)^2	$[M][LT^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
40.	स्थितिज ऊर्जा	द्रव्यमान × गुरुत्वीय त्वरण × ऊँचाई	$[M][LT^{-2}][L]$	$[M L^2 T^{-2}]$
41.	घूर्णी गतिज ऊर्जा	½ × जड़त्व आघूर्ण × (कोणीय वेग)^2	$[M^0L^0T^0][ML^2] \times [T^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
42.	दक्षता	$\dfrac{\textit{निर्गत कार्य अथवा ऊर्जा}}{\textit{निवेश कार्य अथवा ऊर्जा}}$	$\dfrac{[ML^2T^{-2}]}{[ML^2T^{-2}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
43.	कोणीय आवेग	बल आघूर्ण × समय	$[ML^2T^{-2}][T]$	$[M L^2T^{-1}]$
44.	गुरुत्वीय नियतांक	$\dfrac{\text{बल} \times (\text{दूरी})^2}{\text{द्रव्यमान} \times \text{द्रव्यमान}}$	$\dfrac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M][M]}$	$[M^{-1} L^3T^{-2}]$
45.	प्लांक नियतांक	ऊर्जा/आवृत्ति	$[ML^2T^{-2}]/[T^{-1}]$	$[M L^2T^{-1}]$
46.	ऊष्मा धारिता, एंट्रॉपी	ऊष्मीय ऊर्जा/ताप	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[M L^2T^{-2}K^{-1}]$
47.	विशिष्ट ऊष्मा धारिता	$\dfrac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान} \times \text{ताप}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M][K]$	$[M^0 L^2T^{-2}K^{-1}]$
48.	गुप्त ऊष्मा	$\dfrac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान}}$	$[ML^2T^{-2}]/[M]$	$[M^0 L^2 T^{-2}]$
49.	तापीय प्रसार गुणांक अथवा ऊष्मा प्रसरणीयता	$\dfrac{\text{विमा में परिवर्तन}}{\text{मूल विमा} \times \text{ताप}}$	$[L]/[L][K]$	$[M^0 L^0 K^{-1}]$
50.	ऊष्मा चालकता	$\dfrac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा} \times \text{मोटाई}}{\text{क्षेत्रफल} \times \text{ताप} \times \text{समय}}$	$\dfrac{[ML^2T^{-2}][L]}{[L^2][K][T]}$	$[M LT^{-3}K^{-1}]$
51.	आयतन प्रत्यास्थता गुणांक अथवा (संपीड्यता)$^{-1}$	$\dfrac{\text{आयतन} \times \text{दाब में परिवर्तन}}{\text{आयतन में परिवर्तन}}$	$\dfrac{[L^3][ML^{-1}T^{-2}]}{[L^3]}$	$[M^{-1} T^{-2}]$
52.	अभिकेंद्री त्वरण	(वेग)^2/त्रिज्या	$[LT^{-1}]^2/[L]$	$[M^0 LT^{-2}]$
53.	स्टेफॉन नियतांक	$\dfrac{(\text{ऊर्जा/क्षेत्रफल} \times \text{समय})}{(\text{ताप})^4}$	$\dfrac{[ML^2T^{-2}]}{[L^2][T][K]^4}$	$[M L^0T^{-3}K^{-4}]$
54.	वीन नियतांक	तरंगदैर्घ्य × ताप	$[L][K]$	$[M^0 LT^0 K]$

55.	बोल्ट्ज़मान नियतांक	ऊर्जा/ताप	$[ML^2T^{-2}]/[K]$	$[M\,L^2T^{-2}K^{-1}]$
56.	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$\frac{\text{दाब} \times \text{आयतन}}{\text{मोल} \times \text{ताप}}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^3]}{[mol][K]}$	$[M\,L^2T^{-2}\,K^{-1}\,mol^{-1}]$
57.	आवेश	विद्युत् धारा × समय	$[A][T]$	$[M^0\,L^0\,TA]$
58.	धारा घनत्व	विद्युत् धारा/क्षेत्रफल	$[A]/[L^2]$	$[M^0\,L^{-2}\,T^0A]$
59.	वोल्टता, विद्युत विभव, विद्युत् वाहक बल	कार्य/आवेश	$[ML^2T^{-2}]/[AT]$	$[M\,L^{-2}\,T^{-3}\,A^{-1}]$
60.	प्रतिरोध	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{विद्युत् धारा}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[A]}$	$[M\,L^2T^{-3}\,A^{-2}]$
61.	धारिता	$\frac{\text{आवेश}}{\text{विभवांतर}}$	$\frac{[AT]}{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}$	$[M^{-1}\,L^{-2}T^4A^2]$
62.	वैद्युत प्रतिरोधकता अथवा (वैद्युत चालकता)$^{-1}$	$\frac{\text{प्रतिरोध} \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$	$[ML^2T^{-3}A^{-2}][L^2]/[L]$	$[ML^3\,T^{-3}\,A^{-2}]$
63.	विद्युत क्षेत्र	वैद्युत बल/आवेश	$[MLT^{-2}]/[AT]$	$[M\,LT^{-3}\,A^{-1}]$
64.	वैद्युत अभिवाह	विद्युत् क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[MLT^{-3}A^{-1}][L^2]$	$[M\,L^3\,T^{-3}\,A^{-1}]$
65.	वैद्युत द्विध्रुव-आघूर्ण	बल आघूर्ण/विद्युत् क्षेत्र	$\frac{[ML^2T^{-2}]}{[MLT^{-3}A^{-1}]}$	$[M^0\,LT\,A]$
66.	विद्युत क्षेत्र तीव्रता अथवा वैद्युत तीव्रता	$\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{दूरी}}$	$\frac{[ML^2T^{-3}A^{-1}]}{[L]}$	$[M\,LT^{-3}\,A^{-1}]$
67.	चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय अभिवाह घनत्व, चुंबकीय प्रेरण	$\frac{\text{बल}}{\text{विद्युत् धारा} \times \text{लंबाई}}$	$[MLT^{-2}]/[A][L]$	$[M\,L^0\,T^{-2}A^{-1}]$
68.	चुंबकीय अभिवाह	चुंबकीय क्षेत्र × क्षेत्रफल	$[MT^{-2}A^{-1}][L^2]$	$[M\,L^2\,T^{-2}A^{-1}]$
69.	प्रेरकत्व	$\frac{\text{चुंबकीय अभिवाह}}{\text{विद्युत् धारा}}$	$\frac{[ML^2T^{-2}A^{-1}]}{[A]}$	$[M\,L^2\,T^{-2}A^{-2}]$
70.	चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण	बल आघूर्ण/चुंबकीय क्षेत्र अथवा विद्युत धारा × क्षेत्रफल	$[ML^2T^{-2}]/[MT^{-2}A^{-1}]$ अथवा $[A][L^2]$	$[M^0\,L^2\,T^0A]$
71.	चुंबकीय क्षेत्र प्रबलता, चुंबकीय तीव्रता अथवा चुंबकीय आघूर्ण घनत्व	$\frac{\text{चुंबकीय आघूर्ण}}{\text{आयतन}}$	$\frac{[L^2A]}{[L^3]}$	$[M^0\,L^{-1}T^0A]$
72.	विद्युतशीलता (परावैद्युतांक) नियतांक (मुक्त आकाश का)	$\frac{\text{आवेश} \times \text{आवेश}}{4\,\pi \times \text{वैद्युत बल} \times (\text{दूरी})^2}$	$\frac{[AT][AT]}{[MLT^{-2}][L]^2}$	$[M^{-1}\,L^{-3}\,T^4A^2]$
73.	पारगम्यता नियतांक (मुक्त आकाश का)	$\frac{2\,\pi \times \text{बल} \times \text{दूरी}}{(\text{विद्युत् धारा}) \times (\text{विद्युत् धारा}) \times \text{लंबाई}}$	$\frac{[M^0\,L^0\,T^0][MLT^{-2}][L]}{[A][A][L]}$	$[M\,L\,T^{-2}\,A^{-2}]$
74.	अपवर्तनांक	$\frac{\text{निर्वात में प्रकाश की चाल}}{\text{माध्यम में प्रकाश की चाल}}$	$[LT^{-1}]/[LT^{-1}]$	$[M^0\,L^0\,T^0]$
75.	फैराडे नियतांक	आवोगाद्रो नियतांक × मूल आवेश	$[AT]/[mol]$	$[M^0\,L^0\,TA\,mol^{-1}]$
76.	तरंग संख्या	$2\,\pi$/तरंगदैर्घ्य	$[M^0L^0T^0]/[L]$	$[M^0\,L^{-1}\,T^0]$

77.	विकिरण अभिवाह, विकिरण शक्ति	उत्सर्जित ऊर्जा/समय	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
78.	विकिरण अभिवाह की ज्योति अथवा विकिरण तीव्रता	$\frac{\text{स्रोत का विकिरण अभिवाह अथवा विकिरण शक्ति}}{\text{घन कोण}}$	$[ML^2T^{-3}]/[M^0 L^0 T^0]$	$[ML^2 T^{-3}]$
79.	दीप्त शक्ति अथवा स्रोत का ज्योति फ्लक्स	$\frac{\text{उत्सर्जित ज्योति ऊर्जा}}{\text{समय}}$	$[ML^2T^{-2}]/[T]$	$[M L^2 T^{-3}]$
80.	ज्योति तीव्रता अथवा स्रोत की प्रदीपन क्षमता	$\frac{\text{ज्योति फ्लक्स}}{\text{घन कोण}}$	$\frac{[M L^2 T^{-3}]}{[M^0 L^0 T^0]}$	$[M L^2 T^{-3}]$
81.	प्रदीपन की तीव्रता अथवा ज्योतिर्मयता	$\frac{\text{ज्योति तीव्रता}}{(\text{दूरी})^2}$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[ML^0 T^{-3}]$
82.	आपेक्षिक ज्योति	$\frac{\text{दी गई तरंगदैर्घ्य के किसी स्रोत का ज्योति फ्लक्स}}{\text{उसी क्षमता के स्रोत का चरम सुग्राहिता तरंगदैर्घ्य}}$ (555 n m) का ज्योति फ्लक्स	$\frac{[ML^2T^{-3}]}{[M L^2 T^{-3}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
83.	ज्योति दक्षता	$\frac{\text{कुल ज्योति फ्लक्स}}{\text{कुल विकिरण फ्लक्स}}$	$[ML^2T^{-3}]/[ML^2T^{-3}]$	$[M^0 L^0 T^0]$
84.	प्रदीप्ति घनत्व अथवा प्रदीप्ति	$\frac{\text{आपतित ज्योति फ्लक्स}}{\text{क्षेत्रफल}}$	$[ML^2T^{-3}]/[L^2]$	$[M L^0 T^{-3}]$
85.	द्रव्यमान क्षति	[न्यूक्लियॉनों (नाभिक कणों) के द्रव्यमानों का योग] (नाभिक का द्रव्यमान)	$[M]$	$[M L^0 T^0]$
86.	नाभिक की बंधन ऊर्जा	द्रव्यमान क्षति × (निर्वात में प्रकाश की चाल)^2	$[M][LT^{-1}]^2$	$[M L^2 T^{-2}]$
87.	क्षय-नियतांक	0.693/अर्ध आयु	$[T^{-1}]$	$[M^0 L^0 T^{-1}]$
88.	अनुनाद आवृत्ति	(प्रेरकत्व × धारिता)$^{-½}$	$[ML^2T^{-2}A^{-2}]^{-½} \times [M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-½}$	$[M^0 L^0 A^0T^{-1}]$
89.	गुणता कारक अथवा कुंडली का Q - कारक	$\frac{\text{अनुनाद आवृत्ति} \times \text{प्रेरकत्व}}{\text{प्रतिरोध}}$	$\frac{[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]}{[M L^2 T^{-3}A^{-2}]}$	$[M^0 L^0 T^0]$
90.	लेंस की क्षमता	(फोकस दूरी)$^{-1}$	$[L^{-1}]$	$[M^0 L^{-1} T^0]$
91.	आवर्धन	$\frac{\text{प्रतिबिंब-दूरी}}{\text{वस्तु-दूरी}}$	$[L]/[L]$	$[M^0 L^0 T^0]$
92.	तरल प्रवाह दर	$\frac{\pi/8 \times (\text{दाब}) \times (\text{त्रिज्या})^4}{(\text{श्यानता गुणांक}) \times (\text{लंबाई})}$	$\frac{[ML^{-1}T^{-2}][L^4]}{[ML^{-1}T^{-1}][L]}$	$[M^0 L^3 T^{-1}]$
93.	धारिता-प्रतिघात	(कोणीय आवृत्ति × धारिता)$^{-1}$	$[T^{-1}]^{-1}[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]^{-1}$	$[M L^2 T^{-3}A^{-2}]$
94.	प्रेरणिक प्रतिघात	(कोणीय आवृत्ति × प्रेरकत्व)	$[T^{-1}][ML^2T^{-2}A^{-2}]$	$[M L^2 T^{-3}A^{-2}]$

अभ्यास तथा अतिरिक्त अभ्यासों के उत्तर

अध्याय 1

1.1 (a) 10^{-6}; (b) 1.5×10^4; (c) 5; (d) 11.3, 1.13×10^4

1.2 (a) 10^7; (b) 10^{-16}; (c) 3.9×10^4; (d) 6.67×10^{-8}

1.5 500

1.6 (c)

1.7 0.035 mm

1.9 94.1

1.10 (a) 1; (b) 3; (c) 4; (d) 4, (e) 4; (f) 4

1.11 $8.72\ m^2$; $0.0855\ m^3$

1.12 (a) 2.3 kg ; (b) 0.02 g

1.13 सही सूत्र $m = m_0 \left(1 - v^2/c^2\right)^{-½}$ है ।

1.14 $\cong 3 \times 10^{-7}\ m^3$

1.15 $\cong 10^4$; किसी गैस में अंतराअणुक पृथकन अणु के आकार से बहुत अधिक होता है ।

1.16 प्रेक्षक के आँखों पर समीपस्थ वस्तुएँ दूरस्थ वस्तुओं की अपेक्षा अधिक कोण बनाती हैं। जब आप गतिमान होते हैं तो समीपस्थ वस्तुओं की अपेक्षा दूरस्थ वस्तुओं द्वारा बने कोण में परिवर्तन कम होता है। अत: दूरस्थ वस्तुएँ आपके साथ गतिमय प्रतीत होती हैं जबकि समीपस्थ वस्तुएँ विपरीत दिशा में।

1.17 $1.4\ \ 10^3\ kgm^{-3}$, सूर्य का द्रव्यमान–घनत्व द्रवों/ठोसों के घनत्वों के परिसर में होता है, गैसों के घनत्वों के परिसर में नहीं । सूर्य की भीतरी परतों के कारण बाहरी परतों पर अंतर्मुखी गुरुत्वाकर्षण बल के कारण ही गर्म प्लैज़्मा का इतना उच्च घनत्व हो जाता है ।

अध्याय 2

2.1 (a), (b)

2.2 (a) A .... B, (b) A .... B, (c) B .... A, (d) वही (e) B .... A.........एक बार ।

2.4 37 s

2.5 $3.06\ m\ s^{-2}$, 11.4 s

2.6 (a) ऊर्ध्वाधर अधोमुखी; (b) शून्य वेग, $9.8\ m\ s^{-2}$ का अधोमुखी त्वरण; (c) $x>0$ (उपरिमुखी तथा अधोमुखी गति); $v<0$ (उपरिमुखी); $v>0$ (अधोमुखी), $a>0$ हर समय; (d) 44.1 m, 6 s

2.7 (a) सही; (b) गलत ; (c) सही (यदि कण संघट्ट के उसी क्षण उसी चाल से प्रतिक्षेपित होता है, तो इससे यह अर्थ निकलता है कि त्वरण अनंत है, जो कि भौतिक रूप से संभव नहीं है) ; (d) गलत (तभी सही है जबकि चुनी हुई धनात्मक दिशा गति की दिशा के अनुदिश है)।

2.10 (i) 5 km h^{-1}, 5 km h^{-1}; (ii) 0; 6 km/h; (iii) $\frac{15}{8}$ km h^{-1}, $\frac{45}{8}$ km h^{-1}

2.11 क्योंकि किसी यादृच्छिक लघु समय अंतराल के लिए, विस्थापन का परिमाण पथ-लंबाई के बराबर होता है ।

2.12 चारों ग्राफ असंभव हैं । (a) एक ही समय किसी कण की दो विभिन्न स्थितियाँ नहीं हो सकतीं; (b) एक ही समय किसी कण के विपरीत दिशाओं में वेग नहीं हो सकते ; (c) चाल कभी भी ऋणात्मक नहीं होती ; (d) किसी कण की कुल पथ-लंबाई समय के साथ कभी भी नहीं घट सकती (ध्यान दीजिए, ग्राफ पर बने तीर के चिह्न अर्थहीन हैं) ।

2.13 नहीं, गलत है । x-t आलेख किसी कण के प्रक्षेपण को प्रदर्शित नहीं करता । संदर्भ : कोई पिंड किसी मीनार से गिराया जाता है ($x = 0$), $t = 0$ पर ।

2.14 105 m s^{-1}

2.15 (a) चिकने फर्श पर विराम में रखी किसी गेंद पर किक लगाई जाती है जिससे वह गेंद किसी दीवार से टकराकर समानीत (reduced) चाल से वापस लौटती है तथा विपरीत दीवार की ओर जाती है जो उसे रोक देती है ।

(b) किसी आरंभिक वेग से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर फेंकी गई कोई गेंद फर्श से हर टक्कर के पश्चात् घटी चाल से वापस लौटती है ।

(c) एकसमान वेग से गतिशील कोई क्रिकेट गेंद अत्यंत लघु समय अंतराल के लिए बल्ले से हिट होकर वापस लौटती है ।

2.16 $x < 0, v < 0, a > 0; x > 0, v > 0, a < 0; x < 0, v > 0, a > 0$ ।

2.17 3 में सबसे अधिक, 2 में सबसे कम; 1 तथा 2 में $v > 0$; 3 में $v < 0$

2.18 2 में त्वरण का परिमाण अधिकतम; 3 में चाल अधिकतम; 1, 2 तथा 3 में $v>0$, 1 तथा 3 में $a>0$, 2 में $a<0$; A, B, C तथा D पर $a = 0$

अध्याय 3

3.1 आयतन, द्रव्यमान, चाल, घनत्व, मोलों की संख्या, कोणीय आवृत्ति अदिश है, शेष सभी सदिश हैं ।

3.2 कार्य, विद्युत धारा

3.3 आवेग

3.4 केवल (c) तथा (d) स्वीकार्य हैं ।

3.5 (a) T, (b) F, (c) F, (d) T, (e) T

3.6 **संकेत :** किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग (अंतर) कभी भी तीसरी भुजा से कम (अधिक) नहीं हो सकता । संरेखी सदिशों के लिए यह योग (अंतर) तीसरी भुजा के समान होता है ।

3.7 (a) के अतिरिक्त सभी प्रकथन सही हैं ।

3.8 प्रत्येक के लिए 400 m ; B

3.9 (a) 0; (b) 0; (c) 21.4 kmh^{-1}

3.10 1 km परिमाण का विस्थापन आरंभिक दिशा से 60 का कोण बनाते हुए; कुल पथ-लंबाई = 1.5 km (तीसरा मोड़); शून्य विस्थापन सदिश; पथ-लंबाई = 3 km (छठा मोड़); 866 m, 30 , 4 km (आठवाँ मोड़) ।

3.11 (a) 49.3 kmh^{-1}; (b) 21.4 kmh^{-1}, नहीं, केवल सीधे पथों के लिए ही परिमाण में माध्य चाल, माध्य वेग के बराबर होती है ।

3.12 150.5 m

3.13 50 m

3.14 9.9 m s^{-2}, हर बिंदु पर त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर ।

3.15 6.4 g

3.16 (a) गलत (केवल एकसमान वृत्तीय गति के लिए ही सही) ।

(b) सही, (c) सही

3.17 (a) $\mathbf{v}(t) = (3.0\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0\,t\,\hat{\mathbf{j}})$

$\mathbf{a}(t) = -4.0\,\hat{\mathbf{j}}$

(b) 8.54 m s^{-1}, x-अक्ष से 70°

3.18 (a) 2 s, 24 m, 21.26 m s^{-1}

3.19 $\sqrt{2}$, x-अक्ष से 45° पर ; $\sqrt{2}$, x-अक्ष से – 45° पर, $\left(5/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\right)$

3.20 (b) तथा (e)

3.21 केवल (e) सही है ।

3.22 182.2 m s^{-1}

अध्याय 4

4.1 (a) से (d) में न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार कोई नेट बल नहीं लगता (e) क्योंकि यह वैद्युत चुंबकीय तथा गुरुत्वीय बल उत्पन्न करने वाली भौतिक एजेंसियों से बहुत दूर है, अतः कोई बल नहीं लगता।

4.2 प्रत्येक स्थिति में (वायु के प्रभाव को नगण्य मानते हुए) कंकड़ पर केवल एक ही बल–गुरुत्व बल = 0.5 N ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी लगता है। यदि कंकड़ की गति ऊर्ध्वाधर के अनुदिश नहीं है तब भी उत्तर में कोई परिवर्तन नहीं होता। कंकड़ उच्चतम बिंदु पर विराम में नहीं है। इसकी समस्त गति की अवधि में इस पर वेग का एकसमान क्षैतिज घटक कार्यरत रहता है।

4.3 (a) 1 N ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी (b) वही जो (a) में है, (c) वही जो (a) में है। किसी भी क्षण बल उस क्षण की स्थिति पर निर्भर करता है, इतिहास पर नहीं। (d) 0.1 N रेलगाड़ी की गति की दिशा में ।

4.4 (i) T

4.5 $a = -2.5$ m s^{-2}, $v = u + at$ का प्रयोग करने पर, $0 = 15 - 2.5\,t$ अर्थात् $t = 6.0$ s

4.6 $a = 1.5/25 = 0.06$ m s^{-2}, $F = 3 \times 0.06 = 0.18$ N गति की दिशा में।

4.7 परिणामी बल = 10 N, 8 N बल की दिशा से $\tan^{-1}(3/4) = 37°$ का कोण बनाते हुए ।

त्वरण = 2 m s^{-2} परिणामी बल की ही दिशा में ।

4.8 $a = -2.5$ m s^{-2}; मंदक बल = $465 \times 2.5 = 1.2 \times 10^3$ N

4.9 $F - 20{,}000 \times 10 = 20{,}000 \times 5.0$ अर्थात् $F = 3.0 \times 10^5$ N

4.10 $a = -20$ m s^{-2} $\quad 0 \le t \le 30$ s

$t = -5$ s $\quad x = ut = -10 \times 5 = -50$ m

$t = 25$ s $\quad x = ut + \frac{1}{2}at^2 = (10 \times 25 - 10 \times 62.5)\text{m} = -6.0$ km

$t = 100$ s $\quad$ पहले 30 s तक की गति पर विचार कीजिए

$x_1 = 10 \times 30 - 10 \times 900 = -8700$ m

$t = 30$ s पर $v = 10 - 20 \times 30 = -590$ m s^{-1}

30 s से 100 s की गति के लिए

$$x_2 = -590 \times 70 = -41300 \text{ m}$$

$x = x_1 + x_2 = -50$ km

4.11 (a) $t = 10$ s पर कार का वेग $= 0 + 2 \times 10 = 20 \text{ m s}^{-1}$

न्यूटन के गति के प्रथम नियम के अनुसार समस्त गति की अवधि में वेग का क्षैतिज घटक 20 m s^{-1} है,

$t = 11$s पर वेग का ऊर्ध्वाधर घटक $= 0 + 10 \times 1 = 10 \text{ m s}^{-1}$

$t = 11$s पर पत्थर का वेग $= \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} = 22.4 \text{ m s}^{-1}$ क्षैतिज दिशा से $\tan^{-1}(½)$ का कोण बनाते हुए।

(b) 10 m s^{-2} ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी।

4.12 (a) चरम स्थिति पर गोलक की चाल शून्य है। यदि डोरी काट दी जाए तो वह ऊर्ध्वाधर अधोमुखी गिरेगा।

(b) माध्य स्थिति पर गोलक में क्षैतिज वेग होता है। यदि डोरी काट दी जाए तो वह किसी परवलयिक पथ के अनुदिश गिरेगा।

4.13 तुला का पाठ्यांक व्यक्ति द्वारा फर्श पर आरोपित बल की माप होता है। न्यूटन के गति के तृतीय नियम के अनुसार यह फर्श द्वारा व्यक्ति पर आरोपित अभिलंब बल N के समान एवं विपरीत होता है।

(a) $N = 70 \times 10 = 700$ N; पाठ्यांक 70 kg है।

(b) $70 \times 10 - N = 70 \times 5$; पाठ्यांक 35 kg है।

(c) $N - 70 \times 10 = 70 \times 5$; पाठ्यांक 105 kg है।

(d) $70 \times 10 - N = 70 \times 10$; N = 0; पैमाने का पाठ्यांक शून्य होगा।

4.14 (a) तीनों समय अंतरालों में त्वरण और इसलिए बल भी, दोनों शून्य हैं।

(b) $t = 0$ पर 3 kg m s^{-1} (c) $t = 4$ s पर -3 kg m s^{-1}

4.15 यदि 20 kg द्रव्यमान के पिंड को खीचते हैं, तो

$600 - T = 20\,a$, $a = 20 \text{ m s}^{-2}$, $T = 10\,a$ अर्थात् $T = 200$ N।

यदि 10 kg द्रव्यमान के पिंड को खींचते हैं, तो $a = 20 \text{ m s}^{-2}$; $T = 400$ N

4.16 $T - 8 \times 10 = 8\,a$; $12 \times 10 - T = 12\,a$

अर्थात् $a = 2 \text{ m s}^{-2}$; $T = 96$ N

4.17 संवेग संरक्षण नियम द्वारा कुल अंतिम संवेग शून्य है। दो संवेग सदिशों का योग तब तक शून्य नहीं हो सकता जब तक कि वे दोनों समान एवं विपरीत न हों।

4.18 प्रत्येक गेंद पर आवेग का परिमाप $= 0.05 \times 12 = 0.6 \text{ kg m s}^{-1}$। दोनों आवेग विपरीत दिशाओं में हैं।

4.19 संवेग संरक्षण नियम के अनुसार : $100\,v = 0.02 \times 80$

$v = 0.016 \text{ m s}^{-1} = 1.6 \text{ cm s}^{-1}$

4.20 आवेग, आरंभिक तथा अंतिम दिशाओं के समद्विभाजक रेखा के अनुदिश निर्दिष्ट है।

इसका परिमाण $= 0.15 \times 2 \times 15 \times \cos 22.5° = 4.2 \text{ kg m s}^{-1}$

4.21 $$v = 2\pi \times 1.5 \times \frac{40}{60} = 2\pi \text{ m s}^{-1}$$

$$T = \frac{mv^2}{R} = \frac{0.25 \times 4\pi^2}{1.5} = 6.6 \text{ N}$$

$200=\frac{mv_{max}^2}{R}$, इससे प्राप्त होता है $v_{max}=35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

4.22 प्रथम नियम के अनुसार विकल्प (b) सही है।

4.23 (a) रिक्त दिक्‌स्थान (empty space) से घोड़ा–गाड़ी निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। घोड़ा तथा गाड़ी के बीच पारस्परिक बल निरस्त हो जाते हैं (तृतीय नियम)। फर्श पर, निकाय तथा फर्श के बीच संपर्क बल (घर्षण बल) घोड़े तथा गाड़ी को विराम से गति में लाने का कारण होते हैं।

(b) शरीर का जो भाग सीट के सीधे संपर्क में नहीं है उसके जड़त्व के कारण।

(c) घास–लावक (lawn mower) को किसी कोण पर बल आरोपित करके खींचा अथवा धकेला जाता है। जब आप धक्का देते हैं, तब ऊर्ध्वाधर दिशा में संतुलन के लिए अभिलंब बल (N) उसके भार से अधिक होना चाहिए इसके फलस्वरूप घर्षण बल $f\,(f \propto N)$ बढ़ जाता है और इसीलिए मूवर को चलाने के लिए अधिक बल आरोपित करना पड़ता है। खींचते समय ठीक इसके विपरीत होता है।

(d) ऐसा वह खिलाड़ी संवेग परिवर्तन की दर को घटाने और इस प्रकार गेंद को रोकने के लिए आवश्यक बल को कम करने के लिए करता है।

अध्याय 5

5.1 (a) धनात्मक (b) ऋणात्मक (c) ऋणात्मक (d) धनात्मक (e) ऋणात्मक

5.2 (a) 882 J ; (b) –247 J ; (c) 635 J ; (d) 635 J

किसी पिंड पर नेट बल द्वारा किया गया कार्य इसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।

5.3 (i) $x > a$; 0 (iii) $x < a, x > b\,;\, -V_1$

(ii) $-\infty < x < \infty\,;\, V_1$ (iv) $-b/2 < x < -a/2,\ a/2 < x < b/2\,;\, -V_1$

5.5 (a) रॉकेट; (b) एक संरक्षी बल के तहत किसी पथ पर चलने में किया गया कार्य पिंड की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन का ऋणात्मक होता है। पिंड जब अपनी कक्षा में एक चक्र पूर्ण करता है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता; (c) गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है जबकि स्थितिज ऊर्जा घटती है, तथा इन दोनों ऊर्जाओं का योग, घर्षण के विरुद्ध ऊर्जा क्षय के कारण, घट जाता है ; (d) दूसरे प्रकरण में।

5.6 (a) कम हो जाती है; (b) गतिज ऊर्जा ; (c) बाह्य बल; (d) कुल रैखिक संवेग, तथा कुल ऊर्जा भी (यदि दो पिंडों का निकाय वियुक्त है)।

5.7 (a) F ; (b) F ; (c) F ; (d) F (प्रायः सही परंतु सदैव नहीं, क्यों ?)।

5.8 (a) नहीं; (b) हाँ; (c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के समय रैखिक संवेग संरक्षित रहता है, गतिज ऊर्जा संघट्ट समाप्त होने के पश्चात भी संरक्षित नहीं रहती; (d) प्रत्यास्थ।

5.9 (ii) t

5.10 (iii) $t^{3/2}$

5.11 12 J

5.12 इलेक्ट्रॉन अपेक्षाकृत अधिक तीव्र है, $v_e/v_p = 13.5$

5.13 प्रत्येक आधे में 0.082 J ; – 0.163 J

5.14 हाँ, (अणु + दीवार) निकाय का संवेग संरक्षित है। दीवार का प्रतिक्षेप संवेग इस प्रकार है कि, दीवार का संवेग + बाहर जाने वाले अणु का संवेग = आने वाले अणु का संवेग। यहाँ यह माना गया है कि दीवार आरंभ में विराम अवस्था में है। तथापि, दीवार का अत्यधिक द्रव्यमान होने के कारण प्रतिक्षेप संवेग इसमें नगण्य वेग उत्पन्न कर पाता है। चूंकि यहाँ गतिज ऊर्जा भी संरक्षित रहती है, अतः संघट्ट प्रत्यास्थ है।

5.15 43.6 kW

5.16 (ii)

5.17 यह अपना समस्त संवेग मेज पर रखी गेंद को स्थानांतरित कर देता है तथा जरा भी ऊपर नहीं उठता ।

5.18 5.3 m s^{-1}

5.19 27 km h^{-1} (चाल में कोई परिवर्तन नहीं)

5.20 50 J

5.21 (a) $m = \rho A v t$ (b) $K = \rho A v^3 t/2$ (c) P = 4.5 kWh

5.22 (a) 49000 J (b) 6.45×10^{-3} kg

5.23 (a) 200 m^2 (b) 14 m × 14 m विमा के किसी बड़े घर की छत से तुलनीय ।

अध्याय 6

6.1 प्रत्येक का ज्यामितीय केंद्र । नहीं, द्रव्यमान केंद्र वस्तु के बाहर स्थित हो सकता है जैसा कि किसी छल्ले, खोखले गोले, खोखले सिलिंडर, खोखले घन आदि प्रकरणों में होता है ।

6.2 H तथा Cl नाभिकों को मिलाने वाली रेखा पर H सिरे से 1.24Å दूरी पर अवस्थित ।

6.3 चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है ; अतः (ट्रॉली + बच्चा) निकाय के द्रव्यमान–केंद्र की चाल अपरिवर्तित (v के बराबर) रहती है । ट्रॉली को दौड़ाए रखने में जो बल सम्मिलित हैं वे सभी इस निकाय के आंतरिक बल हैं ।

6.6 $l_z = xp_y - yp_x$, $l_x = yp_z - zp_y$, $l_y = zp_x - xp_z$

6.8 72 cm

6.9 अगले पहिए पर 3675 N, पिछले पहिए पर 5145 N

6.10 गोला

6.11 गतिज ऊर्जा = 3125 J ; कोणीय संवेग = 62.5 J s

6.12 (a) 100 चक्कर/मिनट (कोणीय संवेग संरक्षण नियम उपयोग कीजिए) ।

(b) नई गतिज ऊर्जा घूर्णन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की 2.5 गुनी है । बच्चा अपनी आंतरिक ऊर्जा का उपयोग अपनी घूर्णी गतिज ऊर्जा में वृद्धि करने के लिए करता है ।

6.13 25 s^{-2} ; 10 m s^{-2}

6.14 36 kW

6.15 मूल डिस्क के केन्द्र से R/6 पर कटे भाग के केन्द्र के सामने।

6.16 66.0 g

6.17 $6.75\times10^{12} \text{ rad s}^{-1}$

अध्याय 7

7.1 (a) नहीं

(b) हाँ, यदि अंतरिक्ष यान का आकार उसके लिए इतना अधिक हो कि वह g के परिवर्तन का संसूचण कर सके ।

(c) ज्वारीय प्रभाव दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती होता है और इस अर्थ में यह उन बलों से भिन्न है जो दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं ।

7.2 (a) घटता है (b) घटता है (c) पिंड का द्रव्यमान (d) अधिक

7.3 0.63 घटक से छोटा।

7.5 3.54×10^8 years

7.6 (a) गतिज ऊर्जा (b) कम

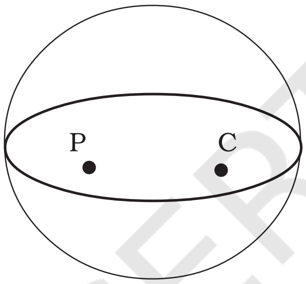
7.7 (a) नहीं, (b) नहीं, (c) नहीं, (d) हाँ

(पलायन वेग पिंड के द्रव्यमान तथा प्रक्षेपण की दिशा पर निर्भर नहीं करता। यह उस बिंदु के गुरुत्वीय विभव पर निर्भर करता है जिससे पिंड का प्रक्षेपण किया गया है। चूँकि यह विभव (अल्पत:) उस बिंदु के अक्षांश तथा ऊँचाई पर निर्भर करता है, अत: पलायन वेग (चाल) भी (अल्पत:) इन्हीं कारकों पर निर्भर करता है।)

7.8 घूमते हुए पिंड की कक्षा में कोणीय संवेग तथा कुल ऊर्जा को छोड़कर शेष सभी राशियों में परिवर्तन होता है।

7.9 (b), (c) तथा (d)

7.10 तथा **7.11** इन दोनों प्रश्नों के लिए रचनाएँ करिए। अर्धगोले को पूरा करके गोला बनाइए।



P तथा C दोनों पर, विभव नियत है तथा इसलिए तीव्रता = 0। अत: (c) और (e) सही हैं।

7.12 2.6×10^8 m

7.13 2.0×10^{30} kg

7.14 1.43×10^{12} m

7.15 28 N

7.16 125 N

7.17 पृथ्वी के केंद्र से 8.0×10^6 m दूरी पर

7.18 31.7 km s^{-1}

7.19 5.9×10^9 J

7.20 2.6×10^6 m s^{-1}

7.21 0, 2.7×10^{-8} J kg^{-1}; माध्य बिंदु पर रखा कोई पिंड किसी अस्थायी संतुलन में है।

टिप्पणी

टिप्पणी

11088CH02

अध्याय 1

मात्रक एवं मापन

1.1 भूमिका

किसी भौतिक राशि का मापन, एक निश्चित, आधारभूत, यादृच्छिक रूप से चुने गए मान्यताप्राप्त, संदर्भ-मानक से इस राशि की तुलना करना है। यह संदर्भ-मानक **मात्रक** कहलाता है। किसी भी भौतिक राशि की माप को मात्रक के आगे एक संख्या (आंकिक संख्या) लिखकर व्यक्त किया जाता है। यद्यपि हमारे द्वारा मापी जाने वाली भौतिक राशियों की संख्या बहुत अधिक है, फिर भी, हमें इन सब भौतिक राशियों को व्यक्त करने के लिए, मात्रकों की सीमित संख्या की ही आवश्यकता होती है, क्योंकि, ये राशियाँ एक दूसरे से परस्पर संबंधित हैं। मूल राशियों को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त मात्रकों को **मूल मात्रक** कहते हैं। इनके अतिरिक्त अन्य सभी भौतिक राशियों के मात्रकों को मूल मात्रकों के संयोजन द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार प्राप्त किए गए व्युत्पन्न राशियों के मात्रकों को **व्युत्पन्न मात्रक** कहते हैं। मूल-मात्रकों और व्युत्पन्न मात्रकों के सम्पूर्ण समुच्चय को **मात्रकों की प्रणाली** (या पद्धति) कहते हैं।

1.2 मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली

बहुत वर्षों तक मापन के लिए, विभिन्न देशों के वैज्ञानिक, अलग-अलग मापन प्रणालियों का उपयोग करते थे। अब से कुछ समय-पूर्व तक ऐसी तीन प्रणालियाँ - CGS प्रणाली, FPS (या ब्रिटिश) प्रणाली एवं MKS प्रणाली, प्रमुखता से प्रयोग में लाई जाती थीं।

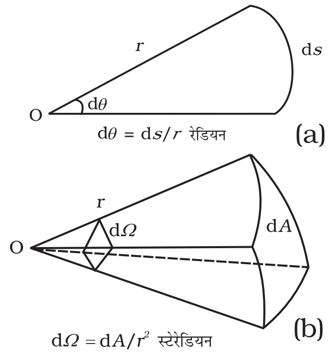
इन प्रणालियों में लम्बाई, द्रव्यमान एवं समय के मूल मात्रक क्रमशः इस प्रकार हैं :

- CGS प्रणाली में, सेन्टीमीटर, ग्राम एवं सेकन्ड।
- FPS प्रणाली में, फुट, पाउन्ड एवं सेकन्ड।
- MKS प्रणाली में, मीटर, किलोग्राम एवं सेकन्ड।

आजकल अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य प्रणाली "*सिस्टम इन्टरनेशनल डि यूनिट्स*" है (जो फ्रेंच भाषा में "मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली" कहना है)। इसे संकेताक्षर में SI लिखा जाता है। SI प्रतीकों, मात्रकों और उनके संकेताक्षरों की योजना अंतर्राष्ट्रीय माप-तोल ब्यूरो (बी.आई.पी.एम.) द्वारा 1971 में विकसित की गई थी एवं नवंबर, 2018 में आयोजित माप-तोल के महासम्मेलन में संशोधित की गई। यह योजना अब वैज्ञानिक, तकनीकी, औद्योगिक एवं व्यापारिक कार्यों में अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर उपयोग हेतु अनुमोदित की गई। SI मात्रकों की 10 की घातों

पर आधारित (दाशिमक) प्रकृति के कारण, इस प्रणाली के अंतर्गत रूपांतरण अत्यंत सुगम एवं सुविधाजनक है। हम इस पुस्तक में SI मात्रकों का ही प्रयोग करेंगे।

SI में सात मूल मात्रक हैं, जो सारणी 1.1 में दिए गए हैं। इन सात मूल मात्रकों के अतिरिक्त दो पूरक मात्रक भी हैं जिनको हम इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं : (i) समतलीय कोण, $d\theta$ चित्र 1.1(a) में दर्शाए अनुसार वृत्त के चाप की लम्बाई ds और इसकी त्रिज्या r का अनुपात होता है। तथा (ii) घन-कोण, $d\Omega$ चित्र 1.1(b) में दर्शाए अनुसार शीर्ष O को केन्द्र की भांति प्रयुक्त करके उसके परितः निर्मित गोलीय पृष्ठ के अपरोधन क्षेत्र dA तथा त्रिज्या r के वर्ग का अनुपात होता है। समतलीय कोण का मात्रक रेडियन है जिसका प्रतीक rad है एवं घन कोण का मात्रक स्टेरेडियन है जिसका प्रतीक sr है। ये दोनों ही विमाविहीन राशियाँ हैं।



चित्र 1.1 (a) समतलीय कोण $d\theta$ एवं (b) घन कोण $d\Omega$ का आरेखीय विवरण

सारणी 1.1 SI मूल राशियाँ एवं उनके मात्रक*

मूल राशि	SI मात्रक		
	नाम	प्रतीक	परिभाषा
लंबाई	मीटर	m	मीटर, संकेत m, लंबाई का SI मात्रक है। इसे निर्वात में प्रकाश की चाल c के नियत संख्यात्मक मान 299792458 को लेकर, जो कि ms^{-1} मात्रक में व्यक्त है, से परिभाषित किया गया है, जहां सेकंड सीज़ियम आवृत्ति $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में परिभाषित है।
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg	किलोग्राम, संकेत kg, द्रव्यमान का SI मात्रक है। इसे प्लांक नियतांक $\boldsymbol{h}$ के नियत संख्यात्मक मान 6.62607015×10^{-34} को लेकर, जोकि J.S. मात्रक में व्यक्त है, से परिभाषित किया गया है; यहां मात्रक J.S. $kg\,m^2s^{-1}$ के समान है, जहां मीटर और सेकंड की परिभाषा $\boldsymbol{c}$ तथा $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में दी गई है।
समय	सेकंड	s	सेकंड, संकेत s, समय का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा सीज़ियम आवृत्ति $\Delta\nu_{cs}$, जो सीज़ियम-133 परमाणु की अक्षुब्ध मूल अवस्था अतिसूक्ष्म संक्रमण आवृत्ति है, के नियत संख्यात्मक मान 9192631770 को लेकर, जिसे Hz मात्रक जो s^{-1} के समान है, में व्यक्त किया गया है; दी गई है।
विद्युत धारा	ऐम्पियर	A	ऐम्पियर, संकेत A, विधुत-धारा का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा, मूल आवेश e के नियत संख्यात्मक मान $1.602176634\times10^{-19}$ को लेकर; जिसे C मात्रक जो A.S के समान है, जहां सेकंड को $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में व्यक्त किया गया है; दी जाती है।
ऊष्मागतिक ताप	केल्विन	K	केल्विन, संकेत K, ऊष्मागतिक ताप का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा, बोल्ट्ज़मान नियतांक, K के नियत संख्यात्मक मान 1.380649×10^{-23} को लेकर; जिसे $J\,K^{-1}$ मात्रक में व्यक्त किया गया है, जो $kg\,m^2\,s^{-2}\,k^{-1}$ के समान है, जहां किलोग्राम, मीटर और सेकंड को h, c और $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में परिभाषित किया जाता है; दी गई है।
पदार्थ की मात्रा	मोल	mol	मोल, संकेत मोल (mol), पदार्थ की मात्र का SI मात्रक है। एक मोल में ठीक 6.02214076×10^{23} ही मूलभूत कण होते हैं। यह संख्या, आवोगाद्रो स्थिरांक, N_A का नियत संख्यात्मक मान होता है जब उसे mol^{-1} मात्रक में व्यक्त किया जाता है और इसे आवोगाद्रो संख्या कहा जाता है। किसी निकाय के पदार्थ की मात्रा, संकेत n, विशिष्ट मूल कणों की संख्या का आमाप होती है। ये मूल कण एक परमाणु, अणु, आयन, इलेक्ट्रॉन, कोई अन्य कण या कणों के विशिष्ट समूह हो सकते हैं।
ज्योति-तीव्रता	केंडेला	cd	केंडेला, संकेत cd, दी गई दिशा में ज्योति-तीवृता का SI मात्रक है। इसकी परिभाषा, 540×10^{12} Hz आवृत्ति वाले एकवर्णी विकिरण की दीप्त प्रभाविकता, k_{cd} के नियत संख्यात्मक मान 683 को लेकर जब उसे $lm\,W^{-1}$ के मात्रकों में व्यक्त किया जाए जो $cd\,sr\,W^{-1}$ या $cd\,sr\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^3$ के समान है, जहां किलोग्राम, मीटर और सेकंड को h, c और $\Delta\nu_{cs}$ के पदों में परिभाषित किया जाता है; दी गई है।

* *इन परिभाषाओं में प्रयुक्त संख्याओं के मान, न तो याद रखने की आवश्यकता है, न परीक्षा में पूछे जाने की। ये यहाँ पर केवल इनके मापन की यथार्थता की सीमा का संकेत देने के लिए दिए गए हैं। प्रौद्योगिकी के विकास के साथ मापन की तकनीकों में भी सुधार होता है, परिणामस्वरूप, मापन अधिक परिशुद्धता से होता है। इस प्रगति के साथ तालमेल बनाए रखने के लिए मूल मात्रकों को संशोधित किया जाता है।*

सारणी 1.2 सामान्य प्रयोग के लिए SI मात्रकों के अतिरिक्त कुछ अन्य मात्रक

नाम	प्रतीक	SI मात्रक के पदों में मान
मिनट	min	60 s
घंटा	h	60 min = 3600 s
दिन	d	24 h = 86400 s
वर्ष	y	365.25 d = 3.156×10^7 s
डिग्री	°	$1° = (\pi/180)$ rad
लिटर	L	1 $dm^3 = 10^{-3}$ m^3
टन	t	10^3 kg
कैरट	c	200 mg
बार	bar	0.1 MPa = 10^5 Pa
क्यूरी	Ci	3.7×10^{10} s^{-1}
रोंजन	R	2.58×10^{-4} C kg^{-1}
क्विंटल	q	100 kg
बार्न	b	100 $fm^2 = 10^{-28}$ m^2
आर	a	1 $dam^2 = 10^2$ m^2
हेक्टार	ha	1 $hm^2 = 10^4$ m^2
मानक वायुमंडलीय दाब	atm	101 325 Pa = 1.013×10^5 Pa

ध्यान दीजिए, मोल का उपयोग करते समय मूल सत्ताओं का विशेष रूप से उल्लेख किया जाना चाहिए। ये मूल सत्ताएँ परमाणु, अणु, आयन, इलेक्ट्रॉन, अन्य कोई कण अथवा इसी प्रकार के कणों का विशिष्ट समूह हो सकता है।

हम ऐसी भौतिक राशियों के मात्रकों का भी उपयोग करते हैं जिन्हें सात मूल राशियों से व्युत्पन्न किया जा सकता है (परिशिष्ट A 6)। SI मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त कुछ व्युत्पन्न मात्रक (परिशिष्ट A 6.1) में दिए गए हैं। कुछ व्युत्पन्न SI मात्रकों को विशिष्ट नाम दिए गए हैं (परिशिष्ट A 6.2) और कुछ व्युत्पन्न SI मात्रक इन विशिष्ट नामों वाले व्युत्पन्न मात्रकों और सात मूल-मात्रकों के संयोजन से बनते हैं (परिशिष्ट A 6.3)। आपको तात्कालिक संदर्भ तथा मार्गदर्शन प्रदान करने के लिए इन मात्रकों को परिशिष्ट (A 6.2) एवं (A 6.3) में दिया गया है। सामान्य व्यवहार में आने वाले अन्य मात्रक सारणी 1.2 में दिए गए हैं।

SI मात्रकों के सामान्य गुणज और अपवर्तकों को व्यक्त करने वाले उपसर्ग और उनके प्रतीक परिशिष्ट (A2) में दिए गए हैं। भौतिक राशियों, रासायनिक तत्वों और नाभिकों के संकेतों के उपयोग संबंधी सामान्य निर्देश परिशिष्ट (A7) में दिए गए हैं और आपके मार्गदर्शन तथा तात्कालिक संदर्भ के लिए SI मात्रकों एवं अन्य मात्रकों संबंधी निर्देश परिशिष्ट (A8) में दिए गए हैं।

1.3 सार्थक अंक

जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है, हर मापन में त्रुटियाँ सम्मिलित होती हैं। अत: मापन के परिणामों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाना चाहिए कि मापन की परिशुद्धता स्पष्ट हो जाए। साधारणत:, मापन के परिणामों को एक संख्या के रूप में प्रस्तुत करते हैं जिसमें वह सभी अंक सम्मिलित होते हैं जो विश्वसनीय हैं, तथा वह प्रथम अंक भी सम्मिलित किया जाता है जो अनिश्चित है। विश्वसनीय अंकों और पहले अनिश्चित अंक को संख्या के **सार्थक-अंक** माना जाता है। यदि हम कहें कि किसी सरल लोलक का दोलन काल 1.62 s है, तो इसमें अंक 1 एवं 6 तो विश्वसनीय एवं निश्चित हैं, जबकि अंक 2 अनिश्चित है; इस प्रकार मापित मान में 3 सार्थक अंक हैं। यदि मापन के बाद किसी वस्तु की लम्बाई, 287.5 cm व्यक्त की जाए तो इसमें चार सार्थक अंक हैं, जिनमें 2, 8, 7 तो निश्चित हैं परन्तु अंक 5 अनिश्चित है। अत: राशि के मापन के परिणाम में सार्थक अंकों से अधिक अंक लिखना अनावश्यक एवं भ्रामक होगा, क्योंकि, यह माप की परिशुद्धता के विषय में गलत धारणा देगा।

किसी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करने के नियम निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा समझे जा सकते हैं। जैसा पहले वर्णन किया जा चुका है कि सार्थक अंक मापन की परिशुद्धता इंगित करते हैं जो मापक यंत्र के अल्पतमांक पर निर्भर करती है। **किसी मापन में विभिन्न मात्रकों के परिवर्तन के चयन से सार्थक अंकों की संख्या परिवर्तित नहीं होती।** यह महत्वपूर्ण टिप्पणी निम्नलिखित में से अधिक प्रेक्षणों को स्पष्ट कर देती है:

(1) उदाहरण के लिए, लम्बाई 2.308 cm में चार सार्थक अंक हैं। परन्तु विभिन्न मात्रकों में इसी लम्बाई को हम 0.02308 m या 23.08 mm या 23080 μm भी लिख सकते हैं।

इन सभी संख्याओं में सार्थक अंकों की संख्या वही अर्थात चार (अंक 2, 3, 0, 8) है। यह दर्शाता है कि सार्थक अंकों की संख्या निर्धारित करने में, दशमलव कहाँ लगा है इसका कोई महत्व नहीं होता। उपरोक्त उदाहरण से निम्नलिखित नियम प्राप्त होते हैं :

- ***सभी शून्येतर अंक सार्थक अंक होते हैं।***
- ***यदि किसी संख्या में दशमलव बिन्दु है, तो उसकी स्थिति का ध्यान रखे बिना, किन्हीं दो शून्येतर अंकों के बीच के सभी शून्य सार्थक अंक होते हैं।***
- ***यदि कोई संख्या 1 से छोटी है तो वे शून्य जो दशमलव के दाईं ओर पर प्रथम शून्येतर अंक के बाईं ओर हों, सार्थक अंक नहीं होते।*** (0.00 2308 में अधोरेखांकित शून्य सार्थक अंक नहीं हैं)।
- ***ऐसी संख्या जिसमें दशमलव नहीं है के अंतिम अथवा अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं होते।***
  (अत: 123 m = 12300 cm = 123000 mm में तीन ही सार्थक अंक हैं, संख्या में अनुगामी शून्य सार्थक अंक नहीं हैं)। तथापि, आप अगले प्रेक्षण पर भी ध्यान दे सकते हैं।
- ***एक ऐसी संख्या, जिसमें दशमलव बिन्दु हो, के अनुगामी शून्य सार्थक अंक होते हैं।***
  (संख्या 3.500 या 0.06900 में चार सार्थक अंक हैं)।

(2) अनुगामी शून्य सार्थक अंक हैं या नहीं इस विषय में भ्रांति हो सकती है। मान लीजिए किसी वस्तु की लम्बाई 4.700 m लिखी गई है। इस प्रेक्षण से यह स्पष्ट है कि यहाँ शून्यों का उद्देश्य माप की परिशुद्धता को बतलाना है अत: यहाँ सभी शून्य सार्थक अंक हैं। (यदि ये सार्थक न होते तो इनको स्पष्ट रूप से लिखने की आवश्यकता न होती। तब सीधे–सीधे हम अपनी माप को 4.7 m लिख सकते थे।) अब मान लीजिए हम अपना मात्रक बदल लेते हैं तो

4.700 m = 470.0 cm = 0.004700 km = 4700 mm

क्योंकि, अंतिम संख्या में दो शून्य, बिना दशमलव वाली संख्या में अनुगामी शून्य हैं, अत: प्रेक्षण (1) के अनुसार हम इस गलत निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि इस संख्या में 2 सार्थक अंक हैं जबकि वास्तव में इसमें चार सार्थक अंक हैं, मात्र मात्रकों के परिवर्तन से सार्थक अंकों की संख्या में परिवर्तन नहीं होता।

(3) ***सार्थक अंकों के निर्धारण में इस प्रकार की संदिग्धता को दूर करने के लिए सर्वोत्तम उपाय यह है कि प्रत्येक माप को वैज्ञानिक संकेत (10 की घातों के रूप में) में प्रस्तुत किया जाए।*** इस संकेत पद्धति में प्रत्येक संख्या को $a \times 10^b$ के रूप में लिखा जाता है, जहाँ a, 1 से 10 के बीच की कोई संख्या है और b, 10 की कोई धनात्मक या ऋणात्मक घात है। संख्या की सन्निकट अवधारणा बनाने के लिए हम इसका पूर्णांकन कर सकते हैं, यानि ($a \le 5$) होने पर इसे 1 और ($5 < a \le 10$) होने पर 10 मान सकते हैं। तब, इस संख्या को लगभग 10^b के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जिसमें 10 की घात b भौतिक राशि के **परिमाण की कोटि** कहलाती है। जब केवल एक अनुमान की आवश्यकता हो तो यह कहने से काम चलेगा कि राशि 10^b की कोटि की है। उदाहरण के लिए पृथ्वी का व्यास (1.28×10^7m), 10^7m की कोटि का है, इसके परिमाण की कोटि 7 है। हाइड्रोजन परमाणु का व्यास (1.06×10^{-10}m), 10^{-10}m की कोटि का है। इसके परिमाण की कोटि –10 है। अत:, पृथ्वी का व्यास, हाइड्रोजन परमाणु के व्यास से 17 परिमाण कोटि बड़ा है।

प्राय: एक अंक के बाद दशमलव लगाने की प्रथा है। इससे ऊपर प्रेक्षण (a) में उल्लिखित भ्रांति लुप्त हो जाता है :

$$4.700 \text{ m} = 4.700 \times 10^2 \text{ cm}$$
$$= 4.700 \times 10^3 \text{ mm} = 4.700 \times 10^{-3} \text{ km}$$

यहाँ सार्थक अंकों की संख्या ज्ञात करने में 10 की घात असंगत है। तथापि, वैज्ञानिक संकेत में आधार संख्या के सभी शून्य सार्थक अंक होते हैं। इस प्रकरण में सभी संख्याओं में 4 सार्थक अंक हैं।

इस प्रकार, वैज्ञानिक संकेत में आधार संख्या a के अनुगामी शून्यों के बारे में कोई भ्रांति नहीं रह जाती। वे सदैव सार्थक अंक होते हैं।

(4) किसी भी मापन के प्रस्तुतिकरण की वैज्ञानिक संकेत विधि एक आदर्श विधि है। परन्तु यदि यह विधि नहीं अपनायी जाती, तो हम पूर्वगामी उदाहरण में उल्लिखित नियमों का पालन करते हैं :

- ***एक से बड़ी, बिना दशमलव वाली संख्या के लिए, अनुगामी शून्य सार्थक-अंक नहीं हैं।***
- ***दशमलव वाली संख्या के लिए अनुगामी शून्य सार्थक अंक हैं।***

(5) 1 से छोटी संख्या में, पारस्परिक रूप से, दशमलव के बाईं ओर लिखा शून्य (जैसे 0.1250) कभी भी सार्थक अंक नहीं होता। तथापि, किसी माप में ऐसी संख्या के अंत में आने वाले शून्य सार्थक अंक होते हैं।

(6) गुणक या विभाजी कारक जो न तो पूर्णांकित संख्याएँ होती हैं और न ही किसी मापित मान को निरूपित करती हैं, यथार्थ होती हैं और उनमें अनन्त सार्थक-अंक होते हैं। उदाहरण के लिए $r = \frac{d}{2}$ अथवा $s = 2\pi r$ में गुणांक 2 एक

यथार्थ संख्या है और इसे 2.0, 2.00 या 2.0000, जो भी आवश्यक हो लिखा जा सकता है। इसी प्रकार, $T = \frac{t}{n}$, में n एक पूर्णांक है।

1.3.1 सार्थक अंकों से संबंधित अंकीय संक्रियाओं के नियम

किसी परिकलन का परिणाम, जिसमें राशियों के सन्निकट मापे गए मान सम्मिलित हैं (अर्थात् वे मान जिनमें सार्थक अंकों की संख्या सीमित है) व्यक्त करते समय, मूल रूप से मापे गए मानों की अनिश्चितता भी प्रतिबिम्बित होनी चाहिए। यह परिणाम, उन मापित मानों से अधिक यथार्थ नहीं हो सकता जिन पर यह आधारित है। अत:, व्यापक रूप से, किसी भी परिणाम में सार्थक अंकों की संख्या, उन मूल आंकड़ों से अधिक नहीं हो सकती जिनसे इसे प्राप्त किया गया है। इस प्रकार, यदि किसी पिण्ड का मापित द्रव्यमान मान लीजिए 4.237 g है (4 सार्थक अंक), और इसका मापित आयतन 2.51 cm^3 है, तो मात्र अंकीय विभाजन द्वारा इसका घनत्व दशमलव के 11 स्थानों तक 1.68804780876 g/cm^3 आता है। स्पष्टत: घनत्व के इस परिकलित मान को इतनी परिशुद्धता के साथ लिखना पूर्णत: हास्यास्पद तथा असंगत होगा, क्योंकि जिन मापों पर यह मान आधारित है उनकी परिशुद्धता काफी कम है। सार्थक अंकों के साथ अंकीय संक्रियाओं के निम्नलिखित नियम यह सुनिश्चित करते हैं कि किसी परिकलन का अंतिम परिणाम उतनी ही परिशुद्धता के साथ दर्शाया जाता है जो निवेशित मापित मानों की परिशुद्धता के संगत हो:

(1) ***संख्याओं को गुणा या भाग करने से प्राप्त परिणाम में केवल उतने ही सार्थक अंक रहने देना चाहिए जितने कि सबसे कम सार्थक अंकों वाली मूल संख्या में है।***

अत: उपरोक्त उदाहरण में घनत्व को तीन सार्थक अंकों तक ही लिखा जाना चाहिए,

$$\text{घनत्व} = \frac{4.237\,\text{g}}{2.51\,\text{cm}^3} = 1.69\ \text{g cm}^{-3}$$

इसी प्रकार, यदि दी गई प्रकाश की चाल 3.00×10^8 m/s^{-1} (तीन सार्थक अंक) और एक वर्ष (1 y = 365.25 d) में 3.1557×10^7 s (पांच सार्थक अंक) हों, तो एक प्रकाश वर्ष में 9.47×10^{15} m (तीन सार्थक अंक) होंगे।

(2) ***संख्याओं के संकलन अथवा व्यवकलन से प्राप्त अंतिम परिणाम में दशमलव के बाद उतने ही सार्थक अंक रहने देने चाहिए जितने कि संकलित या व्यवकलित की जाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम हैं।***

उदाहरणार्थ, संख्याओं 436.32 g, 227.2 g एवं 0.301 g का योग 663.821 g है। दी गई संख्याओं में सबसे कम परिशुद्ध (227.2 g) माप दशमलव के एक स्थान तक ही यथार्थ है। इसलिए, अंतिम परिणाम को 663.8 g तक पूर्णांकित कर दिया जाना चाहिए।

इसी प्रकार, लम्बाइयों में अंतर को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं,

0.307 m – 0.304 m = 0.003 m = 3 10^{-3} m

ध्यान दीजिए, हमें नियम (1) जो गुणा और भाग के लिए लागू होता है, उसे **संकलन (योग)** के उदाहरण में प्रयोग करके परिणाम को 664 g नहीं लिखना चाहिए और **व्यवकलन** के उदाहरण में 3.00 10^{-3} m नहीं लिखना चाहिए। ये माप की परिशुद्धता को उचित रूप से व्यक्त नहीं करते हैं। संकलन और व्यवकलन के लिए यह नियम दशमलव स्थान के पदों में है।

1.3.2 अनिश्चित अंकों का पूर्णांकन

जिन संख्याओं में एक से अधिक अनिश्चित अंक होते हैं, उनके अभिकलन के परिणाम का पूर्णांकन किया जाना चाहिए। अधिकांश प्रकरणों में, संख्याओं को उचित सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने के नियम स्पष्ट ही हैं। संख्या $2.74\underline{6}$ को तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर 2.75 प्राप्त होता है, जबकि 2.743 के पूर्णांकन से 2.74 मिलता है। परिपाटी के अनुसार नियम यह है कि ***यदि उपेक्षणीय अंक (पूर्वोक्त संख्या में अधोरेखांकित अंक) 5 से अधिक है तो पूर्ववर्ती अंक में एक की वृद्धि कर दी जाती है, और यदि यह उपेक्षणीय अंक 5 से कम होता है, तो पूर्ववर्ती अंक अपरिवर्तित रखा जाता है।*** लेकिन यदि संख्या $2.74\underline{5}$ है, जिसमें उपेक्षणीय अंक 5 है, तो क्या होता है? यहाँ परिपाटी यह है कि ***यदि पूर्ववर्ती अंक सम है तो उपेक्षणीय अंक को छोड़ दिया जाता है और यदि यह विषम है, तो पूर्ववर्ती अंक में 1 की वृद्धि कर देते हैं।*** तब संख्या $2.74\underline{5}$, तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकन करने पर 2.74 हो जाती है। दूसरी ओर, संख्या $2.73\underline{5}$ तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने के पश्चात् 2.74 हो जाती है, क्योंकि पूर्ववर्ती अंक विषम है।

किसी भी उलझन वाले अथवा बहुपदी जटिल परिकलन में, मध्यवर्ती पदों में सार्थक अंकों से एक अंक अधिक रहने देना चाहिए, जिसे परिकलन के अंत में उचित सार्थक अंकों तक पूर्णांकित कर देना चाहिए। इसी प्रकार, एक संख्या जो कई सार्थक अंकों तक ज्ञात है, जैसे निर्वात में प्रकाश का वेग, जिसके लिए, प्राय: 2.99792458×10^8 m/s को सन्निकट मान 3×10^8 m/s में पूर्णांकित कर परिकलनों में उपयोग करते हैं। अंत

में ध्यान रखिये कि सूत्रों में उपयोग होने वाली यथार्थ संख्याएं, जैसे $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ में 2 π, में सार्थक अंकों की संख्या अत्यधिक (अनन्त) है। $\pi = 3.1415926....$ का मान बहुत अधिक सार्थक अंकों तक ज्ञात है लेकिन आम मापित राशियों में परिशुद्धि के आधार पर π का मान 3.142 या 3.14 भी लेना तर्क सम्मत है।

उदाहरण 1.1 किसी घन की प्रत्येक भुजा की माप 7.203 m है। उचित सार्थक अंकों तक घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात कीजिए।

हल मापी गई लम्बाई में सार्थक अंकों की संख्या 4 है। इसलिए, परिकलित क्षेत्रफल एवं आयतन के मानों को भी 4 सार्थक अंकों तक पूर्णांकित किया जाना चाहिए।

घन का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 6(7.203)^2 \text{ m}^2$
$= 311.299254 \text{ m}^2$
$= 311.3 \text{ m}^2$

घन का आयतन $= (7.203)^3 \text{ m}^3$
$= 373.714754 \text{ m}^3$
$= 373.7 \text{ m}^3$

उदाहरण 1.2 किसी पदार्थ के 5.74 g का आयतन 1.2 cm^3 है। सार्थक अंकों को ध्यान में रखते हुए इसका घनत्व व्यक्त कीजिए।

हल द्रव्यमान में 3 सार्थक अंक हैं, जबकि आयतन के मापित मान में केवल दो सार्थक अंक हैं। अत: घनत्व को केवल दो सार्थक अंकों तक व्यक्त किया जाना चाहिए।

$$\text{घनत्व} = \frac{5.74}{1.2} \text{ g cm}^{-3}$$
$$= 4.8 \text{ g cm}^{-3}$$

1.3.3 अंकगणितीय परिकलनों के परिणामों में अनिश्चितता निर्धारित करने के नियम

अंकीय संक्रियाओं में संख्याओं/ मापित राशियों में अनिश्चितता या त्रुटि निर्धारित करने संबंधी नियमों को निम्नलिखित उदाहरणों के द्वारा समझा जा सकता है।

(1) यदि किसी पतली, आयताकार शीट की लम्बाई और चौड़ाई, किसी मीटर पैमाने से मापने पर क्रमश: 16.2 cm एवं 10.1 cm हैं, तो यहाँ प्रत्येक माप में तीन सार्थक अंक हैं। इसका अर्थ है कि लम्बाई को हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$l = 16.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$
$$= 16.2 \text{ cm} \pm 0.6 \text{ \%}.$$

इसी प्रकार, चौड़ाई को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$b = 10.1 \pm 0.1 \text{ cm}$$
$$= 10.1 \text{ cm} \pm 1 \text{ \%}$$

तब, त्रुटि संयोजन के नियम का उपयोग करने पर, दो (या अधिक) प्रायोगिक मापों के गुणनफल की त्रुटि

$$lb = 163.62 \text{ cm}^2 \pm 1.6\%$$
$$= 163.62 \pm 2.6 \text{ cm}^2$$

इस उदाहरण के अनुसार हम अंतिम परिणाम को इस प्रकार लिखेंगे

$$l\,b = 164 \pm 3 \text{ cm}^2$$

यहाँ, 3 cm^2 आयताकार शीट के क्षेत्रफल के आकलन में की गई त्रुटि अथवा अनिश्चितता है।

(2) ***यदि किसी प्रायोगिक आंकड़े के समुच्चय में n सार्थक अंकों का उल्लेख है, तो आंकड़े के संयोजन से प्राप्त परिणाम भी n सार्थक अंकों तक वैध होगा।***

तथापि, यदि आंकड़े घटाये जाते हैं तो सार्थक अंकों की संख्या कम की जा सकती है। उदाहरणार्थ, 12.9 g – 7.06 g दोनों तीन सार्थक अंकों तक विनिर्दिष्ट हैं, परन्तु इसे 5.84 g के रूप में मूल्यांकित नहीं किया जा सकता है बल्कि केवल 5.8 g लिखा जाएगा, क्योंकि संकलन या व्यवकलन में अनिश्चितताएँ एक भिन्न प्रकार से संयोजित होती हैं। (संकलित या व्यवकलित की जाने वाली संख्याओं में दशमलव के बाद कम से कम अंकों वाली संख्या न कि कम से कम सार्थक अंकों वाली संख्या निर्णय का आधार होती है।)

(3) ***किसी संख्या के मान में आपेक्षिक त्रुटि, जो विनिर्दिष्ट सार्थक अंकों तक दी गई है, न केवल n पर, वरन, दी गई संख्या पर भी निर्भर करती है।***

उदाहरणार्थ, द्रव्यमान 1.02 g के मापन में यथार्थता ± 0.01 g है, जबकि दूसरी माप 9.89 g भी ± 0.01 g तक ही यथार्थ है।

1.02 में आपेक्षिक त्रुटि
$$= (\pm 0.01/1.02) \times 100 \text{ \%}$$
$$= \pm 1\%$$

इसी प्रकार 9.89 g में आपेक्षिक त्रुटि
$$= (\pm 0.01/9.89) \times 100 \text{ \%}$$
$$= \pm 0.1 \text{ \%}$$

अंत में, याद रखिए कि **बहुपदीय अभिकलन के मध्यवर्ती परिणाम को परिकलित करने में प्रत्येक माप को, अल्पतम परिशुद्ध माप से एक सार्थक अंक अधिक रखना चाहिए।** आंकड़ों के अनुसार इसे तर्कसंगत करने के बाद ही इनकी अंकीय संक्रियाएँ करना चाहिए अन्यथा पूर्णांकन की त्रुटियाँ उत्पन्न हो जाएंगी। उदाहरणार्थ, 9.58 के व्युत्क्रम का तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकन करने पर मान 0.104 है, परन्तु 0.104 का व्युत्क्रम करने पर तीन सार्थक अंकों तक प्राप्त मान 9.62 है। पर यदि हमने $1/9.58 = 0.1044$ लिखा होता तो उसके व्युत्क्रम को तीन सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने पर हमें मूल मान 9.58 प्राप्त होगा।

उपरोक्त उदाहरण, जटिल बहुपदी परिकलन के मध्यवर्ती पदों में (कम से कम परिशुद्ध माप में अंकों की संख्या की अपेक्षा) एक अतिरिक्त अंक रखने की धारणा को न्यायसंगत ठहराता है, जिससे कि संख्याओं की पूर्णांकन प्रक्रिया में अतिरिक्त त्रुटि से बचा जा सके।

1.4 भौतिक राशियों की विमाएँ

किसी भौतिक राशि की प्रकृति की व्याख्या उसकी विमाओं द्वारा की जाती है। व्युत्पन्न मात्रकों द्वारा व्यक्त होने वाली सभी भौतिक राशियाँ, सात मूल राशियों के संयोजन के पदों में प्रस्तुत की जा सकती हैं। इन मूल राशियों को हम भौतिक संसार की सात विमाएँ कह सकते हैं और इन्हें गुरु कोष्ठक के साथ निर्दिष्ट किया जाता है। इस प्रकार, लम्बाई की विमा [L], विद्युत धारा की [A], ऊष्मागतिकीय ताप की [K], ज्योति तीव्रता की [cd], और पदार्थ की मात्रा की [mol] है। ***किसी भौतिक राशि की विमाएँ उन घातों (या घातांकों) को कहते हैं, जिन्हें उस राशि को व्यक्त करने के लिए मूल राशियों पर चढ़ाना पड़ता है।*** ध्यान दीजिए किसी राशि को गुरु कोष्ठक [ ] से घेरने का यह अर्थ है कि हम उस राशि की विमा पर विचार कर रहे हैं।

यांत्रिकी में, सभी भौतिक राशियों को विमाओं [L], [M] और [T] के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु द्वारा घेरा गया आयतन उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई अथवा तीन लम्बाइयों के गुणन द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसलिए, आयतन का विमीय सूत्र $= [L] \times [L] \times [L] = [L]^3 = [L^3]$। क्योंकि, आयतन, द्रव्यमान और समय पर निर्भर नहीं करता, इसलिए यह कहा जाता है कि आयतन में द्रव्यमान की शून्य विमा, $[M^\circ]$, समय की शून्य विमा $[T^\circ]$ तथा लम्बाई की 3 विमाएँ $[L^3]$ हैं।

इसी प्रकार, बल को द्रव्यमान और त्वरण के गुणनफल के रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

बल = द्रव्यमान × त्वरण

= द्रव्यमान × (लम्बाई)/(समय)^2

बल की विमाएँ $[M]\,[L]/[T]^2 = [M\,L\,T^{-2}]$ हैं। अतः बल में, द्रव्यमान की 1, लम्बाई की 1 और समय की –2 विमाएँ हैं। यहाँ अन्य सभी मूल राशियों की विमाएँ शून्य हैं।

ध्यान दीजिए, इस प्रकार के प्रस्तुतीकरण में परिमाणों पर विचार नहीं किया जाता। इसमें भौतिक राशियों के प्रकार की गुणता का समावेश होता है। इस प्रकार, इस संदर्भ में वेग परिवर्तन, प्रारंभिक वेग, औसत वेग, अंतिम वेग और चाल, ये सभी तुल्य राशियाँ हैं, क्योंकि ये सभी राशियाँ लम्बाई/समय के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं और इनकी विमाएँ $[L]/[T]$ या $[L\,T^{-1}]$ हैं।

1.5 विमीय सूत्र एवं विमीय समीकरणें

किसी दी हुई भौतिक राशि का **विमीय सूत्र** वह व्यंजक है जो यह दर्शाता है कि किसी भौतिक राशि में किस मूल राशि की कितनी विमाएँ हैं। उदाहरणार्थ, आयतन का विमीय सूत्र $[M^\circ\,L^3\,T^\circ]$ और वेग या चाल का $[M^\circ\,L\,T^{-1}]$ है। इसी प्रकार, $[M^\circ\,L\,T^{-2}]$, त्वरण का तथा $[M\,L^{-3}\,T^\circ]$ द्रव्यमान घनत्व का विमीय सूत्र है।

किसी भौतिक राशि को उसके विमीय सूत्र के बराबर लिखने पर प्राप्त समीकरण को उस राशि का **विमीय समीकरण** कहते हैं। अतः विमीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें किसी भौतिक राशि को मूल राशियों और उनकी विमाओं के पदों में निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, आयतन $[V]$, चाल $[\upsilon]$, बल $[F]$ और द्रव्यमान घनत्व $[\rho]$ की विमीय समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$[V] = [M^0\,L^3\,T^0]$$
$$[\upsilon] = [M^0\,L\,T^{-1}]$$
$$[F] = [M\,L\,T^{-2}]$$
$$[\rho] = [M\,L^{-3}\,T^0]$$

भौतिक राशियों के बीच संबंध निरूपित करने वाले समीकरण के आधार पर विमीय समीकरण, व्युत्पन्न की जा सकती है। विविध प्रकार की बहुत सी भौतिक राशियों के विमीय सूत्र, जिन्हें अन्य भौतिक राशियों के मध्य संबंधों को निरूपित करने वाले समीकरणों से व्युत्पन्न तथा मूल राशियों के पदों में व्यक्त किया गया है, आपके मार्गदर्शन एवं तात्कालिक संदर्भ के लिए परिशिष्ट–9 में दिए गए हैं।

1.6 विमीय विश्लेषण एवं इसके अनुप्रयोग

विमाओं की संकल्पना की स्वीकृति, जो भौतिक व्यवहार के वर्णन में मार्गदर्शन करती है, अपना एक आधारिक महत्व रखती है क्योंकि इसके अनुसार केवल वही भौतिक राशियाँ संकलित या व्यवकलित की जा सकती हैं जिनकी विमाएँ समान हैं।

विमीय विश्लेषण का व्यापक ज्ञान, विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंधों के निगमन में सहायता करता है और विभिन्न गणितीय व्यंजकों की व्युत्पत्ति, यथार्थता तथा विमीय संगतता की जाँच करने में सहायक है। जब दो या अधिक भौतिक राशियों के परिमाणों को गुणा (या भाग) किया जाता है, तो उनके मात्रकों के साथ उस प्रकार का व्यवहार किया जाना चाहिए जैसा हम सामान्य बीज-गणितीय प्रतीकों के साथ करते हैं। अंश और हर से सर्वसम मात्रकों को हम निरसित कर सकते हैं। यही बात भौतिक राशि की विमाओं के साथ भी लागू होती है। इसी प्रकार, किसी गणितीय समीकरण में पक्षों में प्रतीकों द्वारा निरूपित भौतिक राशियों की विमाएँ समान होनी चाहिए।

1.6.1 समीकरणों की विमीय संगति की जाँच

भौतिक राशियों के परिमाण केवल तभी संकलित या व्यवकलित किए जा सकते हैं यदि उनकी विमाएँ समान हों। दूसरे शब्दों में, हम केवल एक ही प्रकार की राशियों का संकलन या व्यवकलन कर सकते हैं। अतः बल को वेग के साथ संकलित या ऊष्मा गतिक ताप में से विद्युत धारा को व्यवकलित नहीं किया जा सकता। इस सरल सिद्धांत को **विमाओं की समघातता सिद्धांत** कहते हैं और इसकी सहायता से किसी समीकरण की संशुद्धि की जाँच कर सकते हैं। यदि किसी समीकरण के सभी पदों की विमाएँ समान नहीं हैं तो वह समीकरण गलत होती है। अतः यदि हम किसी पिण्ड की लम्बाई (या दूरी) के लिए व्यंजक व्युत्पन्न करें, तो चाहे उसमें सम्मिलित प्रतीक कुछ भी हों, उनकी विमाओं को सरल करने पर अंत में प्रत्येक पद में लम्बाई की विमा ही शेष रहनी चाहिए। इसी प्रकार, यदि हम चाल के लिए समीकरण व्युत्पन्न करें, तो इसके दोनों पक्षों के पदों का विमीय-सूत्र सरलीकरण के बाद $[L\,T^{-1}]$ ही पाया जाना चाहिए।

यदि किसी समीकरण की संशुद्धि में संदेह हो तो उस समीकरण की संगति की प्राथमिक जांच के लिए मान्य प्रथा के अनुसार विमाओं का उपयोग किया जाता है। किन्तु, विमीय संगति किसी समीकरण के सही होने की गारंटी नहीं है। यह अविम राशियों या फलनों की अनिश्चितता सीमा तक अनिश्चित होती है। त्रिकोणमितीय, लघुगणकीय और चरघातांकी फलनों जैसे विशिष्ट फलनों के कोणांक अविम होने चाहिए। एक शुद्ध संख्या, समान भौतिक राशियों का अनुपात, जैसे अनुपात के रूप में कोण (लम्बाई/लम्बाई), अनुपात के रूप में अपवर्तनांक (निर्वात में प्रकाश का वेग/माध्यम में प्रकाश का वेग) आदि की कोई विमाएँ नहीं होतीं।

अब, हम निम्नलिखित समीकरण की विमीय संगति या समांगता की जाँच कर सकते हैं

$$x = x_0 + v_0\,t + (1/2)\,a\,t^2$$

जहाँ x किसी कण अथवा पिण्ड द्वारा t सेकंड में चलित वह दूरी है, जो कण या पिण्ड समय $t = 0$ पर स्थिति x_0 से प्रारंभिक वेग v_0 से आरम्भ करके तय करता है, और इसका गति की दिशा में एकसमान त्वरण a रहता है।

प्रत्येक पद के लिए विमीय समीकरण लिखने पर,

$$[x] = [L]$$
$$[x_0] = [L]$$
$$[v_0\,t] = [L\,T^{-1}]\;[T] = [L]$$
$$[1/2\;a\,t^2] = [L\,T^{-2}]\,[T^2] = [L]$$

क्योंकि इस समीकरण के सभी पदों की विमाएँ समान (लम्बाई की) हैं, इसलिए यह विमीय दृष्टि से संगत समीकरण है।

यहाँ ध्यान देने योग्य तथ्य यह है, कि विमीय संगति परीक्षण, मात्रकों की संगति से कम या अधिक कुछ नहीं बताता। लेकिन, इसका लाभ यह है कि हम मात्रकों के किसी विशेष चयन के लिए बाध्य नहीं हैं और न ही हमें मात्रकों के पारस्परिक गुणजों या अपवर्तकों में रूपांतरण की चिन्ता करने की आवश्यकता है। **यह बात भी हमें स्पष्ट करनी चाहिए कि यदि कोई समीकरण संगति परीक्षण में असफल हो जाती है तो वह गलत सिद्ध हो जाती है, परन्तु यदि वह परीक्षण में सफल हो जाती है तो इससे वह सही सिद्ध नहीं हो जाती। इस प्रकार कोई विमीय रूप से सही समीकरण आवश्यक रूप से यथार्थ (सही) समीकरण नहीं होती, जबकि विमीय रूप से गलत या असंगत समीकरण गलत होनी चाहिए।**

उदाहरण 1.3 आइए निम्नलिखित समीकरण पर विचार करें

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = m\,g\,h$$

यहाँ m वस्तु का द्रव्यमान, v इसका वेग है, g गुरुत्वीय त्वरण और h ऊँचाई है। जाँचिए कि क्या यह समीकरण विमीय दृष्टि से सही है।

हल यहाँ वाम पक्ष की विमाएँ

$$[M]\;[L\,T^{-1}]^2 = [M]\,[L^2\,T^{-2}]$$

तथा

$$= [M\,L^2\,T^{-2}]$$

दक्षिण पक्ष की विमाएँ

$$[M][L\,T^{-2}]\;[L] = [M][L^2\,T^{-2}] = [M\,L^2\,T^{-2}]$$

चूँकि, दोनों पक्षों की विमाएँ समान हैं, इसलिए यह समीकरण विमीय दृष्टि से सही है।

उदाहरण 1.4 ऊर्जा का SI मात्रक J = kg $m^2 s^{-2}$; है, चाल v का $m\ s^{-1}$ और त्वरण a का $m\ s^{-2}$ है। गतिज ऊर्जा (K) के लिए निम्नलिखित सूत्रों में आप किस-किस को विमीय दृष्टि से गलत बताएँगे? (m पिण्ड का द्रव्यमान है)।

(a) $K = m^2 v^3$
(b) $K = (1/2)mv^2$
(c) $K = ma$
(d) $K = (3/16)mv^2$
(e) $K = (1/2)mv^2 + ma$

हल प्रत्येक सही समीकरण में दोनों पक्षों का विमीय सूत्र समान होना चाहिए। यह भी कि केवल समान विमाओं वाली राशियों का ही संकलन या व्यवकलन किया जा सकता है। दक्षिण पक्ष की राशि की विमाएँ (a) के लिए $[M^2\ L^3\ T^{-3}]$; (b) तथा (d) के लिए $[M\ L^2\ T^{-2}]$; (c) के लिए $[M\ L\ T^{-2}]$ है। समीकरण (e) के दक्षिण पक्ष की राशि की कोई उचित विमाएँ नहीं हैं क्योंकि इसमें भिन्न विमाओं वाली दो राशियों को संकलित किया गया है। अब क्योंकि K की विमाएँ $[M\ L^2\ T^{-2}]$ है, इसलिए सूत्र (a), (c) एवं (e) विमीय रूप से संगत नहीं हैं। ध्यान दें, कि विमीय तर्कों से यह पता नहीं चलता कि (b) व (d) में कौन सा सूत्र सही है। इसके लिए गतिज ऊर्जा की वास्तविक परिभाषा को देखना पड़ेगा (देखें अध्याय 5)। गतिज ऊर्जा के लिए सही सूत्र (b) में दिया गया है। ◀

1.6.2 विभिन्न भौतिक राशियों के मध्य संबंध व्युत्पन्न करना

कभी-कभी विभिन्न भौतिक राशियों के बीच संबंध व्युत्पन्न करने के लिए विमाओं की विधि का उपयोग किया जा सकता है। इसके लिए हमें यह ज्ञात होना चाहिए कि एक भौतिक राशि किन-किन दूसरी भौतिक राशियों पर निर्भर करती है (तीन भौतिक राशियों या एकघाततः स्वतंत्र चरों तक)। इसके लिए, हम दी गई राशि को निर्भर राशियों की विभिन्न घातों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। आइये, एक उदाहरण द्वारा इस प्रक्रिया को समझें।

उदाहरण 1.5 एक सरल लोलक पर विचार कीजिए, जिसमें गोलक को एक धागे से बाँध कर लटकाया गया है और जो गुरुत्व बल के अधीन दोलन कर रहा है। मान लीजिए कि इस लोलक का दोलन काल इसकी लम्बाई (l), गोलक के द्रव्यमान (m) और गुरुत्वीय त्वरण (g) पर निर्भर करता है। विमाओं की विधि का उपयोग करके इसके दोलन-काल के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

हल दोलन काल T की, राशियों l, g और m पर निर्भरता को एक गुणनफल के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$T = k\, l^x g^y m^z$$

जहाँ, k एक विमाहीन स्थिरांक है, एवं x, y, z घातांक हैं।
दोनों ओर की राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[L^o M^o T^1] = [L^1]^x [L^1 T^{-2}]^y [M^1]^z$$

$$= L^{x+y} T^{-2y} M^z$$

दोनों ओर की विमाएँ समीकृत करने पर

$$x + y = 0;\ -2y = 1;\ \text{एवं}\ z = 0$$

$$\text{अतः}\ x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0$$

$$\therefore\quad T = k\, l^{½} g^{-½}$$

$$\text{या}\quad T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

ध्यान दीजिए, यहाँ स्थिरांक k का मान विमीय विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता है। यहाँ इसका कोई अर्थ नहीं है कि सूत्र के दक्षिण पक्ष को किसी संख्या से गुणा किया गया है, क्योंकि ऐसा करने से विमाएँ प्रभावित नहीं होतीं।

$$\text{वास्तव में,}\ k = 2\pi,\ \text{अतः}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ ◀

परस्पर संबंधित राशियों के बीच संबंध व्युत्पन्न करने के लिए विमीय विश्लेषण काफी उपयोगी है। तथापि विमाहीन स्थिरांकों के मान इस विधि द्वारा ज्ञात नहीं किए जा सकते। विमीय विधि द्वारा किसी समीकरण की केवल विमीय वैधता ही जांची जा सकती है, किसी समीकरण में विभिन्न भौतिक राशियों के बीच यथार्थ संबंध नहीं जांचे जा सकते। यह समान विमा वाली राशियों में विभेद नहीं कर सकती।

इस अध्याय के अंत में दिए गए कई अभ्यास प्रश्न, आपकी विमीय विश्लेषण की कुशलता विकसित करने में सहायक होंगे।

सारांश

1. भौतिक विज्ञान भौतिक राशियों के मापन पर आधारित एक परिमाणात्मक विज्ञान है । कुछ भौतिक राशियां जैसे लंबाई, द्रव्यमान, समय, विद्युत धारा, ऊष्मागतिक ताप, पदार्थ की मात्रा और ज्योति-तीव्रता, मूल राशियों के रूप में चुनी गई हैं।
2. प्रत्येक मूल राशि किसी मूल मात्रक (जैसे मीटर, किलोग्राम, सेकंड, ऐम्पियर, केल्विन, मोल और कैंडेला) के पद में परिभाषित है । मूल मात्रक स्वेच्छा से चयनित परंतु समुचित रूप से मानकीकृत निर्देश मानक होते हैं । मूल राशियों के मात्रकों को मूल मात्रक कहते हैं।
3. मूल राशियों से व्युत्पन्न अन्य भौतिक राशियों को मूल मात्रकों के संयोजन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जिन्हें व्युत्पन्न मात्रक कहते हैं । मूल और व्युत्पन्न दोनों मात्रकों के पूर्ण समुच्चय को, मात्रक प्रणाली कहते हैं ।
4. सात मूल मात्रकों पर आधारित मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली (SI) वर्तमान में अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत प्रणाली है । यह प्रणाली समस्त संसार में व्यापक रूप से प्रयोग में लाई जाती है ।
5. मूल राशियों और व्युत्पन्न राशियों से प्राप्त सभी भौतिक मापों में SI मात्रकों का प्रयोग किया जाता है। कुछ व्युत्पन्न मात्रकों को SI मात्रकों में विशेष नामों (जैसे जूल, न्यूटन, वाट आदि) से व्यक्त किया जाता है ।
6. SI मात्रकों के सुपरिभाषित एवं अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत मात्रक प्रतीक हैं (जैसे मीटर के लिए m, किलोग्राम के लिए kg, सेकंड के लिए s, ऐम्पियर के लिए A, न्यूटन के लिए N, इत्यादि)।
7. प्राय: छोटी एवं बड़ी राशियों की भौतिक मापों को वैज्ञानिक संकेत में 10 की घातों में व्यक्त किया जाता है। माप संकेतों तथा आंकिक अभिकलनों की सरलता हेतु संख्याओं की परिशुद्धता का संकेत करते हुए वैज्ञानिक संकेत एवं पूर्वलग्नों का प्रयोग किया जाता है ।
8. भौतिक राशियों के संकेतन और SI मात्रकों के प्रतीकों, कुछ अन्य मात्रकों, भौतिक राशियों और मापों को उचित रूप से व्यक्त करने हेतु पूर्वलग्न के लिए कुछ सामान्य नियमों और निर्देशों का पालन करना चाहिए ।
9. किसी भी भौतिक राशि के अभिकलन में उसके मात्रक की प्राप्ति हेतु संबंध (संबंधों) में सम्मिलित व्युत्पन्न राशियों के मात्रकों को वांछित मात्रकों की प्राप्ति तक बीजगणितीय राशियों की भांति समझना चाहिए ।
10. मापित एवं अभिकलित राशियों में केवल उचित सार्थक अंकों को ही रखा रहने देना चाहिए । किसी भी संख्या में सार्थक अंकों की संख्या का निर्धारण, उनके साथ अंकीय संक्रियाओं को करने और अनिश्चित अंकों का निकटन करने में इनके लिए बनाए गए नियमों का पालन करना चाहिए ।
11. मूल राशियों की विमाओं और इन विमाओं का संयोजन भौतिक राशियों की प्रकृति का वर्णन करता है । समीकरणों की विमीय संगति की जांच और भौतिक राशियों में संबंध व्युत्पन्न करने में विमीय विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। कोई विमीय संगत समीकरण वास्तव में सही हो, यह आवश्यक नहीं है परंतु विमीय रूप से गलत या असंगत समीकरण गलत ही होगी ।

अभ्यास

टिप्पणी : संख्यात्मक उत्तरों को लिखते समय, सार्थक अंकों का ध्यान रखिये।

1.1 रिक्त स्थान भरिए

(a) किसी 1 cm भुजा वाले घन का आयतन.........m^3 के बराबर है ।

(b) किसी 2 cm त्रिज्या व 10 cm ऊंचाई वाले सिलिंडर का पृष्ठ क्षेत्रफल.........$(mm)^2$ के बराबर है।

(c) कोई गाड़ी 18 km/h की चाल से चल रही है तो यह 1 s में.........m चलती है ।

(d) सीसे का आपेक्षिक घनत्व 11.3 है । इसका घनत्व.......g cm^{-3} या......kg m^{-3} है ।

1.2 रिक्त स्थानों को मात्रकों के उचित परिवर्तन द्वारा भरिए
(a) 1 kg m^2 s^{-2} =........... g cm^2 s^{-2}
(b) 1 m =................ ly
(c) 3.0 m s^{-2} =................ km h^{-2}
(d) G = 6.67 10^{-11} N m^2 $(kg)^{-2}$ =................ $(cm)^3$ s^{-2} g^{-1}

1.3 ऊष्मा (परागमन में ऊर्जा) का मात्रक कैलोरी है और यह लगभग 4.2 J के बराबर है, जहां 1 J = 1 kg m^2 s^{-2}। मान लीजिए कि हम मात्रकों की कोई ऐसी प्रणाली उपयोग करते हैं जिससे द्रव्यमान का मात्रक α kg के बराबर है, लंबाई का मात्रक β m के बराबर है, समय का मात्रक γ s के बराबर है । यह प्रदर्शित कीजिए कि नए मात्रकों के पदों में कैलोरी का परिमाण 4.2 $\alpha^{-1} \beta^{-2} \gamma^{2}$ है ।

1.4 इस कथन की स्पष्ट व्याख्या कीजिए : तुलना के मानक का विशेष उल्लेख किए बिना "किसी विमीय राशि को 'बड़ा' या 'छोटा' कहना अर्थहीन है" । इसे ध्यान में रखते हुए नीचे दिए गए कथनों को जहां कहीं भी आवश्यक हो, दूसरे शब्दों में व्यक्त कीजिए :
(a) परमाणु बहुत छोटे पिण्ड होते हैं ।
(b) जेट वायुयान अत्यधिक गति से चलता है ।
(c) बृहस्पति का द्रव्यमान बहुत ही अधिक है ।
(d) इस कमरे के अंदर वायु में अणुओं की संख्या बहुत अधिक है ।
(e) इलेक्ट्रॉन, प्रोटॉन से बहुत भारी होता है ।
(f) ध्वनि की गति प्रकाश की गति से बहुत ही कम होती है ।

1.5 लंबाई का कोई ऐसा नया मात्रक चुना गया है जिसके अनुसार निर्वात में प्रकाश की चाल 1 है। लम्बाई के नए मात्रक के पदों में सूर्य तथा पृथ्वी के बीच की दूरी कितनी है, प्रकाश इस दूरी को तय करने में8 min और 20 s लगाता है।

1.6 लंबाई मापने के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा सबसे परिशुद्ध यंत्र है :
(a) एक वर्नियर केलिपर्स जिसके वर्नियर पैमाने पर 20 विभाजन हैं ।
(b) एक स्क्रूगेज जिसका चूड़ी अंतराल 1 mm और वृत्तीय पैमाने पर 100 विभाजन हैं ।
(c) कोई प्रकाशिक यंत्र जो प्रकाश की तरंगदैर्ध्य की सीमा के अंदर लंबाई माप सकता है ।

1.7 कोई छात्र 100 आवर्धन के एक सूक्ष्मदर्शी के द्वारा देखकर मनुष्य के बाल की मोटाई मापता है। वह 20 बार प्रेक्षण करता है और उसे ज्ञात होता है कि सूक्ष्मदर्शी के दृश्य क्षेत्र में बाल की औसत मोटाई 3.5 mm है । बाल की मोटाई का अनुमान क्या है?

1.8 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :
(a) आपको एक धागा और मीटर पैमाना दिया जाता है । आप धागे के व्यास का अनुमान किस प्रकार लगाएंगे ?
(b) एक स्क्रूगेज का चूड़ी अंतराल 1.0 mm है और उसके वृत्तीय पैमाने पर 200 विभाजन हैं । क्या आप यह सोचते हैं कि वृत्तीय पैमाने पर विभाजनों की संख्या स्वेच्छा से बढ़ा देने पर स्क्रूगेज की यथार्थता में वृद्धि करना संभव है ?
(c) वर्नियर केलिपर्स द्वारा पीतल की किसी पतली छड़ का माध्य व्यास मापा जाना है । केवल 5 मापनों के समुच्चय की तुलना में व्यास के 100 मापनों के समुच्चय के द्वारा अधिक विश्वसनीय अनुमान प्राप्त होने की संभावना क्यों है ?

1.9 किसी मकान का फोटोग्राफ 35 mm स्लाइड पर 1.75 cm^2 क्षेत्र घेरता है । स्लाइड को किसी स्क्रीन पर प्रक्षेपित किया जाता है और स्क्रीन पर मकान का क्षेत्रफल 1.55 m^2 है । प्रक्षेपित्र-परदा व्यवस्था का रेखीय आवर्धन क्या है ?

1.10 निम्नलिखित में सार्थक अंकों की संख्या लिखिए :
(a) 0.007 m^2 (b) 2.64 10^{24} kg (c) 0.2370 g cm^{-3}
(d) 6.320 J (e) 6.032 N m^{-2} (f) 0.0006032 m^2

1.11 धातु की किसी आयताकार शीट की लंबाई, चौड़ाई व मोटाई क्रमशः 4.234 m, 1.005 m व 2.01 cm है । उचित सार्थक अंकों तक इस शीट का क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात कीजिए ।

1.12 पंसारी की तुला द्वारा मापे गए डिब्बे का द्रव्यमान 2.30 kg है । सोने के दो टुकड़े जिनका द्रव्यमान 20.15 g व 20.17 g है, डिब्बे में रखे जाते हैं । (a) डिब्बे का कुल द्रव्यमान कितना है, (b) उचित सार्थक अंकों तक टुकड़ों के द्रव्यमानों में कितना अंतर है ?

1.13 भौतिकी का एक प्रसिद्ध संबंध किसी कण के 'चल द्रव्यमान (moving mass)' m, 'विराम द्रव्यमान (rest mass)' m_0, इसकी चाल v, और प्रकाश की चाल c के बीच है । (यह संबंध सबसे पहले अल्बर्ट आइंस्टाइन के विशेष आपेक्षिकता के सिद्धांत के परिणामस्वरूप उत्पन्न हुआ था ।) कोई छात्र इस संबंध को लगभग सही याद करता है लेकिन स्थिरांक c को लगाना भूल जाता है । वह लिखता है : $m = \dfrac{m_0}{(1-v^2)^{1/2}}$ । अनुमान लगाइए कि c कहां लगेगा ।

1.14 परमाण्विक पैमाने पर लंबाई का सुविधाजनक मात्रक एंगस्ट्रम है और इसे Å : 1Å = 10^{-10} m द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है । हाइड्रोजन के परमाणु का आमाप लगभग 0.5Å है । हाइड्रोजन परमाणुओं के एक मोल का m^3 में कुल आण्विक आयतन कितना होगा?

1.15 किसी आदर्श गैस का एक मोल (ग्राम अणुक) मानक ताप व दाब पर 22.4 L आयतन (ग्राम अणुक आयतन) घेरता है । हाइड्रोजन के ग्राम अणुक आयतन तथा उसके एक मोल के परमाण्विक आयतन का अनुपात क्या है? (हाइड्रोजन के अणु की आमाप लगभग 1Å मानिए) । यह अनुपात इतना अधिक क्यों है?

1.16 इस सामान्य प्रेक्षण की स्पष्ट व्याख्या कीजिए : यदि आप तीव्र गति से गतिमान किसी रेलगाड़ी की खिड़की से बाहर देखें तो समीप के पेड़, मकान आदि रेलगाड़ी की गति की विपरीत दिशा में तेजी से गति करते प्रतीत होते हैं, परन्तु दूरस्थ पिण्ड (पहाड़ियां, चंद्रमा, तारे आदि) स्थिर प्रतीत होते हैं । (वास्तव में, क्योंकि आपको ज्ञात है कि आप चल रहे हैं, इसलिए, ये दूरस्थ वस्तुएं आपको अपने साथ चलती हुई प्रतीत होती हैं)।

1.17 सूर्य एक ऊष्म प्लैज़्मा (आयनीकृत पदार्थ) है जिसके आंतरिक क्रोड का ताप 10^7 K से अधिक और बाह्य पृष्ठ का ताप लगभग 6000 K है । इतने अधिक ताप पर कोई भी पदार्थ ठोस या तरल प्रावस्था में नहीं रह सकता। आपको सूर्य का द्रव्यमान घनत्व किस परिसर में होने की आशा है ? क्या यह ठोसों, तरलों या गैसों के घनत्वों के परिसर में है ? क्या आपका अनुमान सही है, इसकी जांच आप निम्नलिखित आंकड़ों के आधार पर कर सकते हैं : सूर्य का द्रव्यमान = 2.0×10^{30} kg; सूर्य की त्रिज्या = 7.0×10^8 m ।

अध्याय 2

सरल रेखा में गति

2.1 भूमिका

विश्व की प्रत्येक वस्तु प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से गतिमान रहती है । हमारा चलना, दौड़ना, साइकिल सवारी आदि दैनिक जीवन में दिखाई देने वाली क्रियाएँ गति के कुछ उदाहरण हैं । इतना ही नहीं, निद्रावस्था में भी हमारे फेफड़ों में वायु का प्रवेश एवं निष्कासन तथा हमारी धमनियों एवं शिराओं में रुधिर का संचरण होता रहता है । हम पेड़ों से गिरते हुए पत्तों को तथा बाँध से बहते हुए पानी को देखते हैं । मोटरगाड़ी और वायुयान यात्रियों को एक स्थान से दूसरे स्थान को ले जाते हैं । पृथ्वी 24 घंटे में एक बार अपनी अक्ष के परित: घूर्णन करती है तथा वर्ष में एक बार सूर्य की परिक्रमा पूरी करती है । सूर्य अपने ग्रहों सहित हमारी आकाशगंगा नामक मंदाकिनी में विचरण करता है, तथा जो स्वयं भी स्थानीय मंदाकिनियों के समूह में गति करती है ।

इस प्रकार समय के सापेक्ष वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को गति कहते हैं। समय के साथ स्थिति कैसे परिवर्तित होती है ? इस अध्याय में हम गति के बारे में पढ़ेंगे । इसके लिए हमें वेग तथा त्वरण की धारणा को समझना होगा । इस अध्याय में हम अपना अध्ययन वस्तु के एक सरल रेखा के अनुदिश गति तक ही सीमित रखेंगे । इस प्रकार की गति को **सरल रेखीय गति** भी कहते हैं । एकसमान त्वरित सरल रेखीय गति के लिए कुछ सरल समीकरण प्राप्त किए जा सकते हैं। अंतत: गति की आपेक्षिक प्रकृति को समझने के लिए हम आपेक्षिक गति की धारणा प्रस्तुत करेंगे ।

इस अध्ययन में हम सभी गतिमान वस्तुओं को अतिसूक्ष्म मानकर बिंदु रूप में निरूपित करेंगे । यह सन्निकटन तब तक मान्य होता है जब तक वस्तु का आकार निश्चित समय अंतराल में वस्तु द्वारा चली गई दूरी की अपेक्षा पर्याप्त रूप से कम होता है । वास्तविक जीवन में बहुत-सी स्थितियों में वस्तुओं के आमाप (साइज़) की उपेक्षा की जा सकती है और बिना अधिक त्रुटि के उन्हें एक बिंदु-वस्तु माना जा सकता है ।

शुद्धगतिकी में, हम वस्तु की गति के कारणों पर ध्यान न देकर केवल उसकी गति का ही अध्ययन करते हैं । इस अध्याय एवं अगले अध्याय में विभिन्न प्रकार की गतियों का वर्णन किया गया है । इन गतियों के कारणों का अध्ययन हम पाँचवें अध्याय में करेंगे ।

2.2 तात्क्षणिक वेग एवं चाल

जैसा कि हम पढ़ चुके हैं कि औसत वेग से हमें यह ज्ञात होता है कि कोई वस्तु किसी दिए गए समय अंतराल में किस गति से चल रही है, किन्तु इससे यह पता नहीं चल पाता कि इस समय अंतराल के भिन्न-भिन्न क्षणों पर वह किस गति से चल रही है। अतः किसी क्षण t पर वेग के लिए हम **तात्क्षणिक वेग** या केवल वेग v को परिभाषित करते हैं ।

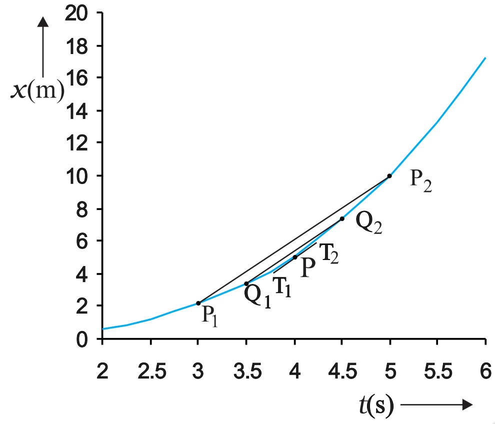
गतिमान वस्तु का तात्क्षणिक वेग उसके औसत वेग के बराबर होगा यदि उसके दो समयों (t तथा $t+\Delta t$) के बीच का अंतराल (Δt) अनन्तः सूक्ष्म हो । गणितीय विधि से हम इस कथन को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.1a)$$

$$= \frac{dx}{dt} \qquad (2.1b)$$

यहाँ प्रतीक $\lim_{\Delta t \to 0}$ का तात्पर्य उसके दायीं ओर स्थित राशि (जैसे $\frac{\Delta x}{\Delta t}$) का वह मान है जो Δt के मान को शून्य की ओर ($\Delta t \to 0$) प्रवृत्त करने पर प्राप्त होगा । कलन गणित की भाषा में समीकरण में दायीं ओर की राशि $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ x का t के सापेक्ष अवकलन गुणांक है। यह गुणांक उस क्षण पर वस्तु की स्थिति परिवर्तन की दर होती है ।

किसी क्षण पर वस्तु का वेग निकालने के लिए हम समीकरण (2.1a) का उपयोग कर सकते हैं । इसके लिए **ग्राफिक** या **गणितीय विधि** को प्रयोग में लाते हैं । मान लीजिए कि हम गतिमान कार का वेग $t = 4$ s (बिंदु P) पर निकालना चाहते हैं । पहले हम $t = 4$ s को केंद्र में रखकर Δt को 2 s लें । औसत वेग की परिभाषा के अनुसार सरल रेखा P_1P_2 (चित्र 2.1) की प्रवणता 3 s से 5 s के अंतराल में वस्तु के औसत वेग को व्यक्त करेगी । अब हम Δt का मान 2 s से घटाकर 1 s कर देते हैं तो P_1P_2 रेखा Q_1Q_2 हो जाती है और इसकी प्रवणता 3.5 s से 4.5 s अंतराल में औसत वेग का मान देगी । अंततः सीमांत मान $\Delta t \to 0$ की परिस्थिति में रेखा P_1P_2 स्थिति-समय वक्र के बिंदु P पर स्पर्श रेखा हो जाती है । इस प्रकार $t = 4$ s क्षण पर कार का वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होगा । **यद्यपि ग्राफिक विधि से इसे प्रदर्शित करना कुछ कठिन है तथापि यदि इसके लिए हम गणितीय विधि का उपयोग करें तो सीमांत प्रक्रिया आसानी से समझी जा सकती है** । चित्र 2.1 में खींचे गए ग्राफ के लिए $x = 0.8\, t^3$ है । सारणी 2.1 में t=4 s को केंद्र में रखकर Δt = 2.0 s, 1.0 s, 0.5 s, 0.1 s तथा 0.01 s के लिए $\Delta x/\Delta t$ के मूल्यों को दर्शाया गया है । दूसरे और तीसरे कॉलम में $t_1(=t-\Delta t/2)$ तथा $t_2(=t-\Delta t/2)$ और चौथे एवं पाँचवें कॉलम में x के तदनुरूप मानों अर्थात $x(t_1) = 0.08\, t^3_1$ तथा $x(t_2) = 0.03\, t^3_2$ को दिखलाया गया है । छठे कॉलम में अंतर $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ को तथा अंतिम कॉलम में Δx व Δt के अनुपात को व्यक्त किया गया



चित्र 2.1 स्थिति-समय ग्राफ से वेग ज्ञात करना । t = 4 s पर वेग उस क्षण पर ग्राफ की स्पर्श रेखा की प्रवणता है ।

सारणी 2.1 t = 4 s के लिए $\Delta x/\Delta t$ का सीमांत मान

Δt (s)	t_1 (s)	t_2 (s)	$x(t_1)$ (m)	$x(t_2)$ (m)	Δx (m)	$\Delta x/\Delta t$ (m s^{-1})
2.0	3.0	5.0	2.16	10.0	7.84	3.92
1.0	3.5	4.5	3.43	7.29	3.86	3.86
0.5	3.75	4.25	4.21875	6.14125	1.9225	3.845
0.1	3.95	4.05	4.93039	5.31441	0.38402	3.8402
0.01	3.995	4.005	5.100824	5.139224	0.0384	3.8400

है । यह अनुपात प्रथम कॉलम में अंकित Δt के भिन्न-भिन्न मानों के संगत औसत वेग का मान है ।

सारणी 2.1 से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे Δt का मान 2.0 s से घटाते-घटाते 0.01 s करते हैं तो औसत वेग अंततः सीमांत मान 3.84 ms^{-1} के बराबर हो जाता है जो t=4 s पर कार का वेग है अर्थात t=4 s पर dx/dt का मान । इस प्रकार गति के हर क्षण के लिए हम कार का वेग निकाल सकते हैं ।

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि वस्तु का तात्क्षणिक वेग निकालने के लिए ग्राफिक विधि सदैव सुविधाजनक नहीं होती है । इस विधि (ग्राफिक विधि) में हम गतिमान वस्तु के स्थिति-समय ग्राफ को सावधानीपूर्वक खींचते हैं तथा Δt को उत्तरोत्तर कम करते हुए वस्तु के औसत वेग ($\bar{v}$) की गणना करते जाते हैं । भिन्न-भिन्न क्षणों पर वस्तु का वेग निकालना तब बहुत आसान हो जाता है जब विभिन्न समयों पर हमारे पास वस्तु की स्थिति के पर्याप्त आँकड़े उपलब्ध हों अथवा वस्तु की स्थिति का समय के फलन के रूप में हमारे पास यथार्थ व्यंजक उपलब्ध हो । ऐसी स्थिति में उपलब्ध आँकड़ों का उपयोग करते हुए समय अंतराल Δt को क्रमशः सूक्ष्म करते हुए $\Delta x/\Delta t$ का मान निकालते जाएँगे और अंततः सारणी 2.1 में दर्शाई गई विधि के अनुसार $\Delta x/\Delta t$ का सीमांत मान प्राप्त कर लेंगे । अन्यथा किसी दिए गए व्यंजक के लिए अवकल गणित का प्रयोग करके गतिमान वस्तु के भिन्न-भिन्न क्षणों के लिए dx/dt की गणना कर लेंगे जैसा कि उदाहरण 2.1 में बताया गया है ।

▶ ***उदाहरण 2.1*** x-अक्ष के अनुदिश किसी गतिमान वस्तु की स्थिति निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त की जाती है : $x=a+bt^2$ । यहाँ a = 8.5 m, b = 2.5 m s^{-2} तथा समय t को सेकंड में व्यक्त किया गया है । t=0 s तथा t=2.0 s क्षणों पर वस्तु का वेग क्या होगा ? t=2.0 s तथा t=4.0 s के मध्य के समय अंतराल में वस्तु का औसत वेग क्या होगा ?

हल अवकल गणित की पद्धति के अनुसार वस्तु का वेग

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a + bt^2\right) = 2bt = 5.0\ t\ \text{m s}^{-1}$$

t =0 s क्षण के लिए v = 0 m/s, तथा t =2.0 s समय पर, v =10 m s^{-1}

$$\text{औसत वेग} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(4.0) - x(2.0)}{4.0 - 2.0}$$

$$= \frac{(a+16b)-(a+4b)}{2.0} = 6.0b$$

$$= 6.0\ \ 2.5 = 15\ \text{m s}^{-1}$$ ◀

ध्यान दीजिए कि एकसमान गति में हर समय (तात्क्षणिक) वेग का वही मान होता है जो औसत वेग का होता है।

तात्क्षणिक चाल या केवल *चाल* गतिमान वस्तु के वेग का परिमाण है । उदाहरण के तौर पर, वेग + 24.0 m s^{-1} तथा –24.0 m s^{-1} दोनों में प्रत्येक का परिमाण 24.0 m s^{-1} होगा। यहाँ यह तथ्य ध्यान में रखना है कि जहाँ किसी सीमित समय अंतराल में वस्तु की औसत चाल उसके औसत वेग के परिमाण के या तो बराबर होती है या उससे अधिक होती है वहीं किसी क्षण पर वस्तु की तात्क्षणिक चाल उस क्षण पर उसके तात्क्षणिक वेग के परिमाण के बराबर होती है । ऐसा क्यों होता है ?

2.3 त्वरण

सामान्यतः वस्तु की गति की अवधि में उसके वेग में परिवर्तन होता रहता है । वेग में हो रहे इस परिवर्तन को कैसे व्यक्त करें । वेग में हो रहे इस परिवर्तन को **समय के सापेक्ष** व्यक्त करना चाहिए या **दूरी के सापेक्ष** ? यह समस्या गैलीलियो के समय भी थी । गैलीलियो ने पहले सोचा कि वेग में हो रहे परिवर्तन की इस दर को दूरी के सापेक्ष व्यक्त किया जा सकता है परंतु जब उन्होंने मुक्त रूप से गिरती हुई तथा नत समतल पर गतिमान वस्तुओं की गति का विधिवत् अध्ययन किया तो उन्होंने पाया कि समय के सापेक्ष वेग परिवर्तन की दर का मान मुक्त रूप से गिरती हुई वस्तुओं के लिए, स्थिर रहता है जबकि दूरी के सापेक्ष वस्तु का वेग परिवर्तन स्थिर नहीं रहता वरन जैसे-जैसे गिरती हुई वस्तु की दूरी बढ़ती जाती है वैसे-वैसे यह मान घटता जाता है। इस अध्ययन ने त्वरण की वर्तमान धारणा को जन्म दिया जिसके अनुसार त्वरण को हम समय के सापेक्ष वेग परिवर्तन के रूप में परिभाषित करते हैं ।

जब किसी वस्तु का वेग समय के सापेक्ष बदलता है तो हम कहते हैं कि उसमें त्वरण हो रहा है । वेग में परिवर्तन तथा तत्संबंधित समय अंतराल के अनुपात को हम औसत त्वरण कहते हैं । इसे $\bar{a}$ से प्रदर्शित करते हैं :

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.2}$$

यहां t_1, t_2 क्षणों पर वस्तु का वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 है । यह एकांक समय में वेग में औसत परिवर्तन होता है । त्वरण का SI मात्रक m s^{-2} है ।

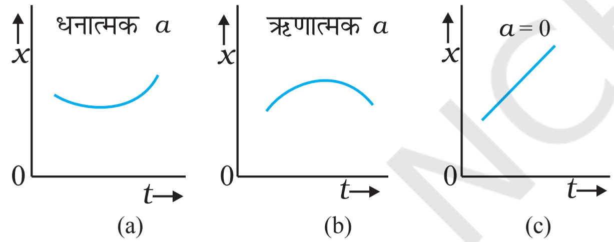
वेग-समय (v-t) ग्राफ से हम वस्तु का औसत त्वरण निकाल सकते हैं । यह इस प्रकार के ग्राफ में उस सरल रेखा की प्रवणता के बराबर होता है जो बिंदु (v_2, t_2) को बिंदु (v_1, t_1) से जोड़ती है ।

तात्क्षणिक त्वरण : जिस प्रकार हमने पूर्व में तात्क्षणिक वेग की व्याख्या की है, उसी प्रकार हम तात्क्षणिक त्वरण को भी परिभाषित करते हैं । वस्तु के तात्क्षणिक त्वरण को a से चिह्नित करते हैं, अर्थात

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (2.3)$$

v–t ग्राफ में किसी क्षण वस्तु का त्वरण उस क्षण वक्र पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है ।

चूँकि वेग एक सदिश राशि है जिसमें दिशा एवं परिमाण दोनों होते हैं अतएव वेग परिवर्तन में इनमें से कोई एक अथवा दोनों निहित हो सकते हैं । अत: या तो चाल (परिमाण) में परिवर्तन, दिशा में परिवर्तन अथवा इन दोनों में परिवर्तन से त्वरण का उद्‌भव हो सकता है । वेग के समान ही त्वरण भी धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य हो सकता है । इसी प्रकार के त्वरण संबंधी स्थिति-समय ग्राफों को चित्रों 2.2 (a), 2.2 (b) तथा 2.2 (c) में दर्शाया गया है । चित्रों से स्पष्ट है कि धनात्मक त्वरण के लिए x–t ग्राफ ऊपर की ओर वक्रित है किन्तु ऋणात्मक त्वरण के लिए ग्राफ नीचे की ओर वक्रित है । शून्य त्वरण के लिए x–t ग्राफ एक सरल रेखा है ।



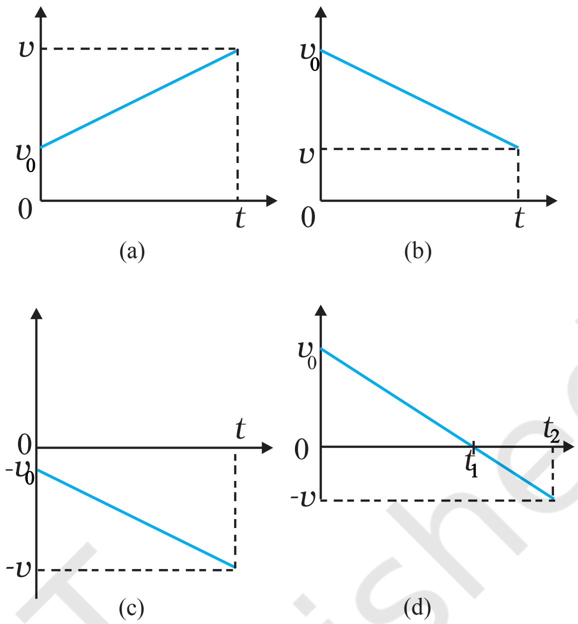
चित्र 2.2 ऐसी गति के लिए स्थिति-समय ग्राफ जिसके लिए (a) त्वरण धनात्मक है, (b) त्वरण ऋणात्मक है तथा (c) त्वरण शून्य है ।

यद्यपि गतिमान वस्तु का त्वरण समय के साथ-साथ बदल सकता है, परंतु सुविधा के लिए इस अध्याय में गति संबंधी हमारा अध्ययन मात्र स्थिर त्वरण तक ही सीमित रहेगा । ऐसी स्थिति में औसत त्वरण $\bar{a}$ का मान गति की अवधि में स्थिर त्वरण के मान के बराबर होगा ।

यदि क्षण t=0 पर वस्तु का वेग v_0 तथा t क्षण पर उसका वेग v हो, तो त्वरण $a = \bar{a} = \dfrac{v - v_0}{t - 0}$ होगा ।

अतएव, $v = v_0 + at \qquad (2.4)$

अब हम यह देखेंगे कि कुछ सरल उदाहरणों में वेग–समय ग्राफ कैसा दिखलाई देता है । चित्र 2.3 में स्थिर त्वरण के लिए चार अलग-अलग स्थितियों में $v - t$ ग्राफ दिखाए गए हैं:



चित्र 2.3 स्थिर त्वरण के साथ गतिमान वस्तु का वेग-समय ग्राफ (a) धनात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति, (b) ऋणात्मक त्वरण से धनात्मक दिशा में गति, (c) ऋणात्मक त्वरण से ऋणात्मक दिशा में गति, (d) ऋणात्मक त्वरण के साथ वस्तु की गति जो समय t_1 पर दिशा बदलती है । 0 से t_1 समयावधि में यह धनात्मक x की दिशा में गति करती है जबकि t_1 व t_2 के मध्य वह विपरीत दिशा में गतिमान है ।

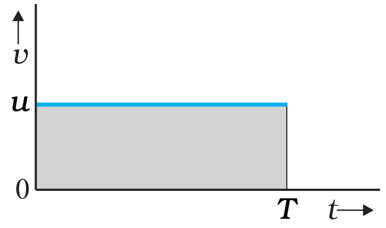
(*a*) कोई वस्तु धनात्मक दिशा में धनात्मक त्वरण से गतिमान है ।

(*b*) कोई वस्तु धनात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण से गतिमान है ।

(*c*) कोई वस्तु ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण से गतिमान है ।

(*d*) कोई वस्तु पहले t_1 समय तक धनात्मक दिशा में चलती है और फिर ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक त्वरण के साथ गतिमान है ।

किसी गतिमान वस्तु के वेग–समय ग्राफ का एक महत्त्वपूर्ण लक्षण है कि v–t ***ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु का विस्थापन व्यक्त करता है***। इस कथन की सामान्य उपपत्ति के लिए अवकल गणित की आवश्यकता पड़ती है तथापि सुगमता के लिए एक स्थिर वेग u से गतिमान वस्तु पर विचार करके इस कथन की सत्यता प्रमाणित कर सकते हैं । इसका वेग-समय ग्राफ चित्र 2.4 में दिखाया गया है ।



चित्र 2.4 *v-t ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु द्वारा निश्चित समय अंतराल में विस्थापन व्यक्त करता है ।*

चित्र में v-t वक्र समय अक्ष के समांतर एक सरल रेखा है । t=0 से t=T के मध्य इस रेखा के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल के बराबर है जिसकी ऊँचाई u तथा आधार T है । अतएव क्षेत्रफल = $u \times T = uT$, जो इस समय में वस्तु के विस्थापन को व्यक्त करता है । कोई क्षेत्रफल दूरी के बराबर कैसे हो सकता है ? सोचिए ! दोनों निर्देशांक अक्षों के अनुदिश जो राशियाँ अंकित की गई हैं, यदि आप उनकी विमाओं पर ध्यान देंगे तो आपको इस प्रश्न का उत्तर मिल जाएगा।

ध्यान दीजिए कि इस अध्याय में अनेक स्थानों पर खींचे गए *x–t*, *v–t* तथा *a–t* ग्राफों में कुछ बिंदुओं पर तीक्ष्ण मोड़ हैं। इसका आशय यह है कि दिए गए फलनों का इन बिंदुओं पर अवकलन नहीं निकाला जा सकता। परंतु किसी वास्तविक परिस्थिति में सभी ग्राफ निष्कोण वक्र होंगे और उनके सभी बिंदुओं पर फलनों का अवकलन प्राप्त किया जा सकता है।

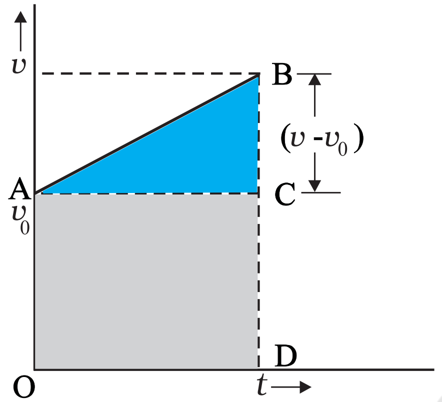
इसका अभिप्राय है कि वेग तथा त्वरण किसी क्षण सहसा नहीं बदल सकते। परिवर्तन सदैव सतत होता है।

2.4 एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु का शुद्धगतिकी संबंधी समीकरण

अब हम एकसमान त्वरण 'a' से गतिमान वस्तु के लिए कुछ गणितीय समीकरण व्युत्पन्न कर सकते हैं जो पाँचों राशियों को किसी प्रकार एक दूसरे से संबंधित करते हैं । ये राशियाँ हैं: विस्थापन (x), लिया गया समय (t), $t = 0$ समय पर वस्तु का प्रारंभिक वेग (v_0), समय t बीत जाने पर अंतिम वेग (v), तथा त्वरण (a) । हम पहले ही v_o और v के मध्य एक समीकरण (2.4) प्राप्त कर चुके हैं जिसमें एकसमान त्वरण a तथा समय t निहित हैं । यह समीकरण है :

$$v = v_o + at \qquad (2.4)$$

इस समीकरण को चित्र 2.5 में ग्राफ के रूप में निरूपित किया गया है ।



चित्र 2.5 *एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के लिए v-t वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ।*

इस वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल :

0 से t समय के बीच का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + आयत OACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(v - v_0)\,t + v_0 t$$

जैसे कि पहले स्पष्ट किया जा चुका है, v-t ग्राफ के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु का विस्थापन होता है। अत: वस्तु का विस्थापन x होगा :

$$x = \frac{1}{2}(v - v_0)\,t + v_0 t \qquad (2.5)$$

परंतु $v - v_0 = at$

अत: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

अथवा $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.6)$

समीकरण (2.5) को हम निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$x = \frac{v + v_0}{2}\,t$$

$$= \bar{v}.t \qquad (2.7a)$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \quad \textbf{(मात्र स्थिर त्वरण के लिए)}$$

(2.7b)

समीकरण (2.7a) तथा (2.7b) का अभिप्राय है कि वस्तु का विस्थापन x माध्य वेग $\bar{v}$ से होता है जो प्रारंभिक एवं अंतिम वेगों के समांतर माध्य के बराबर होता है ।

समीकरण (2.4) से $t = (v - v_0)/a$ । यह मान समीकरण (2.7a) में रखने पर

$$x = \bar{v}\,t = \frac{v+v_0}{2}\cdot\frac{v-v_0}{a} = \frac{v^2-v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (2.8)$$

यदि हम समीकरण (2.4) से t का मान समीकरण (2.6) में रख दें तो भी उपरोक्त समीकरण को प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार पांचों राशियों v_0, v, a, t तथा x के बीच संबंध स्थापित करनेवाले हमें तीन महत्त्वपूर्ण समीकरण प्राप्त हुए–

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad (2.9a)$$

ये सभी एकसमान त्वरित सरल रेखीय गति के शुद्धगतिक समीकरण हैं ।

व्यंजक (2.9a) में जो समीकरण दिए गए हैं, उसकी व्युत्पत्ति के लिए हमने माना है कि क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति 0 है (अर्थात् $x = 0$) । परंतु यदि हम यह मान लें कि क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति शून्य न हो, वरन् अशून्य यानी x_0 हो तो समीकरण (2.9a) और व्यापक समीकरण में रूपांतरित हो जाएगी (यदि हम x के स्थान पर $x–x_0$ लिखें):

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.9b)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (2.9c)$$

▶ **उदाहरण 2.2** कलन-विधि का उपयोग कर एकसमान त्वरण के लिए शुद्धगतिक समीकरण प्राप्त कीजिए।

हल परिभाषा से

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\,dt$$

दोनों पक्षों के समाकलन से

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\ dt$$

$$= a\int_0^t dt \qquad (a \text{ अचर है})$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

पुनः
$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v\,dt$$

दोनों पक्षों के समाकलन से

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\,dt$$

$$\int_0^t (v_0 + at)\,dt$$

$$x - x_0 = v_0\ t + \frac{1}{2}a\ t^2$$

$$x = x_0 + v_0\ t + \frac{1}{2}\ a\ t^2$$

हम लिख सकते हैं :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

अथवा, $v\,dv = a\,dx$

दोनों पक्षों के समाकलन से

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

इस विधि का लाभ यह है कि इसका प्रयोग असमान त्वरण वाले गति के लिए भी कर सकते हैं।

अब हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग कुछ महत्त्वपूर्ण उदाहरणों में करेंगे ।

▶ **उदाहरण 2.3** किसी बहुमंजिले भवन की ऊपरी छत से कोई गेंद 20 m s⁻¹ के वेग से ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में फेंकी गई है । जिस बिंदु से गेंद फेंकी गई है धरती से उसकी ऊँचाई 25.0 m है । (a) गेंद कितनी ऊपर जाएगी ?, तथा (b) गेंद धरती से टकराने के पहले कितना समय लेगी? $g = 10\ m\ s^{-2}$ ।

हल (a) y – अक्ष को चित्र 2.6 में दिखाए गए अनुसार ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर इस प्रकार चुनते हैं कि अक्ष का शून्य बिंदु धरती पर हो ।

अब, $v_o = + 20\ m\ s^{-1}$,

$a = -g = -10\ m\ s^{-2}$,

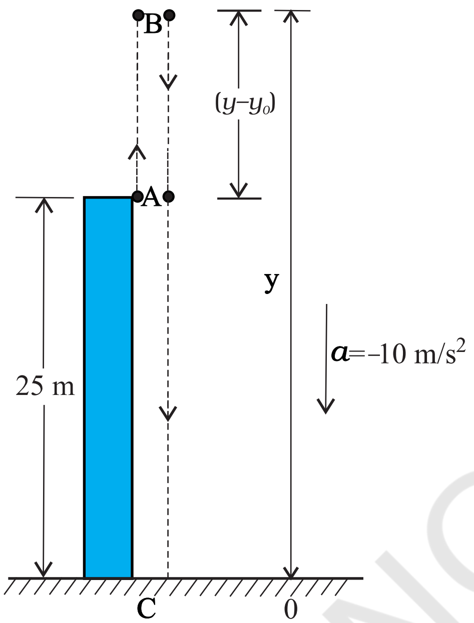
$v = 0\ m\ s^{-1}$

यदि फेंके गए बिंदु से गेंद y ऊँचाई तक जाती है तो समीकरण $v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0)$ से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलेगा–

$0 = (20)^2 + 2(-10)(y - y_0)$, हल करने पर,

$\therefore y - y_0 = 20$ m

(b) इस खण्ड का उत्तर हम दो प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं। **इन दोनों विधियों को ध्यानपूर्वक समझें ।**



चित्र 2.6

पहली विधि **:** इसमें, हम गेंद के मार्ग को दो भागों में विभाजित करते हैं : ऊपर की ओर गति (A से B) तथा नीचे की ओर गति (B से C) तथा संगत समय t_1 व t_2 निकाल लेते हैं। क्योंकि B पर वेग शून्य है, इसलिए :

$$v = v_0 + at$$
$$0 = 20 - 10\, t_1$$

या $\quad t_1 = 2$ s

इस समय में गेंद बिंदु A से B पर पहुंचती है । B अर्थात अधिकतम ऊँचाई से गेंद गुरुत्वजनित त्वरण से मुक्त रूप से नीचे की ओर गिरती है । क्योंकि गेंद y की ऋणात्मक दिशा के अनुदिश चलती है, इसलिए निम्नलिखित समीकरण का उपयोग करके हम t_2 का मान निकाल लेते हैं–

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

हमें $y_0 = 45$ m दिया है तथा $y = 0$, $v_0 = 0$, $a = -g = -10$ m s^{-2}

$\therefore 0 = 45 + (1/2)(-10)\, t_2^2$

अतः $t_2 = 3$ s

इसलिए धरती पर टकराने के पहले गेंद द्वारा लिया गया कुल समय $t_1 + t_2 = 2$ s + 3 s = 5 s होगा ।

दूसरी विधि **:** मूल बिंदु के सापेक्ष गेंद के प्रारंभिक तथा अंतिम स्थितियों के निर्देशांकों को निम्नलिखित समीकरण में उपयोग करके हम गेंद द्वारा लिए गए कुल समय की गणना कर सकते हैं :

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$y = 0$ m, $y_0 = 25$ m, $v_0 = 20$ m s^{-1}, $a = -10$ m s^{-2}, $t = ?$

$$0 = 25 + 20\,t + (1/2)(-10)t^2$$

या $\quad 5t^2 - 20t - 25 = 0$

t के लिए यदि इस द्विघाती समीकरण को हल करें, तो

$$t = 5 \text{ s}$$

ध्यान दीजिए कि दूसरी विधि पहली से श्रेष्ठ है क्योंकि इसमें हमें गति के पथ की चिंता नहीं करनी है क्योंकि वस्तु स्थिर त्वरण से गतिमान है । ◀

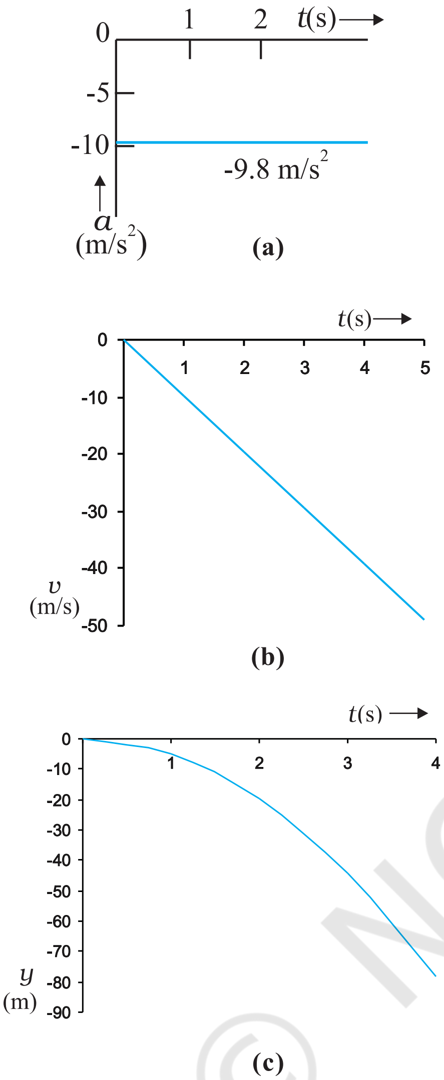
▶ ***उदाहरण 2.4*** **मुक्त पतन :** स्वतंत्रतापूर्वक नीचे की ओर गिरती हुई वस्तु की गति का वर्णन कीजिए । वायुजनित प्रतिरोध की उपेक्षा की जा सकती है ।

हल यदि धरती की सतह से थोड़ी ऊंचाई पर से कोई वस्तु छोड़ दी जाए तो वह पृथ्वी की ओर गुरुत्व बल के कारण त्वरित होगी। गुरुत्वजनित त्वरण को हम g से व्यक्त करते हैं । यदि वस्तु पर वायु के प्रतिरोध को हम नगण्य मानें तो हम कहेंगे कि वस्तु का पतन **मुक्त रूप** से हो रहा है । यदि गिरती हुई वस्तु द्वारा चली गई दूरी पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में बहुत कम है, तो हम g के मान को स्थिर अर्थात 9.8 m s^{-2} ले सकते हैं। इस प्रकार मुक्त पतन एकसमान त्वरण वाली गति का एक उदाहरण है ।

हम यह मानेंगे कि वस्तु की गति $-y$ दिशा में है, क्योंकि ऊपर की दिशा को हम धनात्मक मानते हैं । गुरुत्वीय त्वरण की दिशा सदैव नीचे की ओर होती है, इसलिए इसे हम ऋणात्मक दिशा में लेते हैं ।

अतएव, $\quad a = -g = -9.8$ m s^{-2}

वस्तु को $y = 0$ स्थिति में विरामावस्था से गिराते हैं । इसलिए $v_0 = 0$ और वस्तु के लिए गति संबंधी (2.9a) में दिए गए



चित्र 2.7 *मुक्त पतन में वस्तु की गति। (a) समय के अनुरूप वस्तु के त्वरण में परिवर्तन, (b) समय के अनुरूप वस्तु के वेग में परिवर्तन, (c) समय के अनुरूप वस्तु की स्थिति में परिवर्तन।*

समीकरण निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किए जा सकते हैं–

$v = 0 - g\,t = -9.8\ t\ \text{m s}^{-1}$

$y = 0 - ½\ g\,t^2 = -4.9\ t^2\ \text{m}$

$v^2 = 0 - 2\ g\,y = -19.6\ y\,\text{m}^2\ \text{s}^{-2}$

ये समीकरण वस्तु के वेग, और उसके द्वारा चली गई दूरी को समय के फलन के रूप में तथा दूरी के सापेक्ष उसके वेग में परिवर्तन को व्यक्त करते हैं। समय के सापेक्ष त्वरण, वेग तथा दूरी के परिवर्तन को चित्र 2.7(a), (b) तथा (c) में दिखलाया गया है। ◄

► **उदाहरण 2.5 गैलीलियो का विषम अंक संबंधित नियम :** इस नियम के अनुसार "विरामावस्था से गिरती हुई किसी वस्तु द्वारा समान समय अंतरालों में चली गई दूरियाँ एक दूसरे से उसी अनुपात में होती हैं जिस अनुपात में एक से प्रारंभ होने वाले विषम अंक [अर्थात 1: 3: 5: 7,.......]"। इस कथन को सिद्ध कीजिए।

हल हम विरामावस्था से गिरती हुई किसी वस्तु के समय अंतराल को बहुत-से समान समय अंतरालों τ में विभक्त कर लेते हैं तथा क्रमशः इन समय अंतरालों में वस्तु द्वारा चली गई दूरी निकालते जाते हैं। इस स्थिति में वस्तु का प्रारंभिक वेग शून्य है, अतः

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

इस समीकरण की सहायता से हम भिन्न-भिन्न समय अंतरालों 0, τ, 2τ, 3τ, ... में वस्तु की स्थितियों की गणना कर सकते हैं जिन्हें सारणी 2.2 के दूसरे कॉलम में दिखाया है। यदि प्रथम समय अंतराल τ पर वस्तु का स्थिति निर्देशांक y_0 लें ($y_0 = (-1/2)g\tau^2$) तो आगे के समय अंतरालों के बाद वस्तु की स्थितियों को y_0 के मात्रक में कॉलम तीन में दिए गए तरीके से व्यक्त कर सकते हैं। क्रमिक समय अंतरालों (प्रत्येक τ) में चली गई दूरियों को कॉलम चार में व्यक्त किया गया है। स्पष्ट है कि क्रमशः समय अंतरालों में वस्तु द्वारा चली गई दूरियाँ 1:3:5:7:9:11...... के सरल अनुपात में हैं जैसा कि अंतिम कॉलम में दिखाया गया है।

इस नियम को सर्वप्रथम गैलीलियो गैलिली (1564-1642) ने प्रतिपादित किया था जिन्होंने मुक्त रूप से गिरती हुई वस्तु का पहली बार विधिवत परिमाणात्मक अध्ययन किया था।

► **उदाहरण 2.6 वाहनों की अवरोधन दूरी :** अवरोधन दूरी से हमारा अभिप्राय उस दूरी से है जो गतिमान वस्तु ब्रेक लगाने के कारण रुकने से पहले चल चुकी होती है। सड़क पर गतिमान वाहनों की सुरक्षा के संबंध में यह एक महत्त्वपूर्ण कारक है। यह दूरी वाहन के प्रारंभिक वेग (v_o) तथा उसके ब्रेक की क्षमता या ब्रेक लगाए जाने के परिणामस्वरूप वाहन में उत्पन्न मंदन $-a$ पर निर्भर करती है। किसी वाहन की अवरोधन दूरी के लिए v_o तथा a के पदों में व्यंजक निकालिए।

सारिणी 2.2

t	y	y का मान, y_0 के पदों में $y_o[=(-1/2)g\,\tau^2]$	क्रमिक समय अंतरालों में चली गई दूरी	चली गई दूरियों का अनुपात
0	0	0		
τ	$-(1/2)g\tau^2$	y_o	y_o	1
2τ	$-4(1/2)g\tau^2$	$4y_o$	$3y_o$	3
3τ	$-9(1/2)g\tau^2$	$9y_o$	$5y_o$	5
4τ	$-16(1/2)g\tau^2$	$16y_o$	$7y_o$	7
5τ	$-25(1/2)g\tau^2$	$25y_o$	$9y_o$	9
6τ	$-36(1/2)g\tau^2$	$36y_o$	$11y_o$	11

हल मान लीजिए कि वाहन रुकने के पूर्व d_s दूरी चल चुका है । गति संबंधी समीकरण $v^2 = v_0^2 + 2ax$ में यदि अंतिम वेग $v = 0$ तो अवरोधन दूरी

$$d_s = \frac{-v_0^2}{2a}$$

होगी। अतः अवरोधन दूरी वाहन के प्रारंभिक वेग के वर्ग के समानुपाती होती है । यदि प्रारंभिक वेग को दूना कर दिया जाए तो उसी मंदन के लिए अवरोधन दूरी चार गुनी हो जाएगी।

कार के किसी विशिष्ट मॉडल के लिए विभिन्न वेगों 11, 15, 20 तथा 25 m s^{-1} के संगत अवरोधन दूरियाँ क्रमशः 10 m, 20 m, 34 m तथा 50 m पाई गई हैं जो उपरोक्त समीकरण से प्राप्त मानों के लगभग संगत हैं ।

कुछ क्षेत्रों, जैसे किसी विद्यालय के निकट वाहनों की चाल की सीमा के निर्धारण में अवरोधन दूरी का ज्ञान एक महत्त्वपूर्ण कारक होता है । ◀

▶ **उदाहरण 2.7 प्रतिक्रिया काल :** कभी-कभी हमारे सामने ऐसी परिस्थिति पैदा हो जाती है कि हमसे तत्क्षण कार्यवाही की अपेक्षा की जाती है किंतु अनुक्रिया व्यक्त करने में हमसे कुछ समय लग जाता है । प्रतिक्रिया काल किसी व्यक्ति को कोई घटनाक्रम देखने में, उसके विषय में सोचने में तथा कार्यवाही करने में लगने वाला समय है । उदाहरणस्वरूप, मान लीजिए कि कोई व्यक्ति सड़क पर कार चला रहा है और अचानक रास्ते में एक लड़का सामने आ जाता है तो कार में तेजी से ब्रेक लगाने के पहले व्यक्ति को जो समय लग जाता है, उसे प्रतिक्रिया काल कहेंगे । प्रतिक्रिया काल परिस्थिति की जटिलता एवं व्यक्ति विशेष पर निर्भर करता है ।

आप स्वयं का प्रतिक्रिया काल एक साधारण प्रयोग द्वारा माप सकते हैं । आप अपने मित्र को एक रूलर दें और उससे कहें कि वह आपके हाथ के अंगूठे और तर्जनी के बीच की खाली जगह से रूलर ऊर्ध्वाधर दिशा में गिरा दे (चित्र 2.8) । ज्योंही रूलर को छोड़ा जाए आप उसे पकड़ लें। इन दोनों घटनाओं (रूलर को छोड़ने तथा आपके द्वारा पकड़ने) के बीच लगे समय t_r तथा रूलर द्वारा चली गई दूरी d को नाप लें। किसी विशेष उदाहरण में $d = 21.0$ cm है तो प्रतिक्रिया काल की गणना कीजिए।

हल रूलर मुक्त रूप से गिरता है, अतः $v_0 = 0$, $a = -g = -9.8$ ms^{-2} प्रतिक्रिया काल t_r तथा तय की गई दूरी (d) में संबंध है,

$$d = -\frac{1}{2}gt_r^2$$

या $$t_r = \sqrt{\frac{2d}{g}}\ \text{s}$$

चित्र 2.8 प्रतिक्रिया काल का मापन ।

यदि $d = 21.0$ cm और $g = 9.8$ ms^{-2} है, तो

$$t_r = \sqrt{\frac{2 \times 0.21}{9.8}}\ \text{s} \cong 0.2\ \text{s}$$

सारांश

1. यदि किसी वस्तु की स्थिति समय के साथ बदलती है तो हम कहते हैं कि वस्तु *गतिमान* है। एक सरल रैखिक गति में वस्तु की स्थिति को सुगमता के दृष्टिकोण से चुने गए किसी मूल बिंदु के सापेक्ष निर्दिष्ट किया जा सकता है । मूल बिंदु के दायीं ओर की स्थितियों को धनात्मक तथा बायीं ओर की स्थितियों को ऋणात्मक कहा जाता है ।
2. किसी वस्तु द्वारा चली गई दूरी की लंबाई को *पथ-लंबाई* के रूप में परिभाषित करते हैं ।
3. वस्तु की स्थिति में परिवर्तन को हम *विस्थापन* कहते हैं और इसे Δx से निरूपित करते हैं;
   $\Delta x = x_2 - x_1$
   x_1 और x_2 वस्तु की क्रमशः प्रारंभिक तथा अंतिम स्थितियाँ हैं ।
   पथ-लंबाई उन्हीं दो बिंदुओं के बीच विस्थापन के परिणाम के बराबर या उससे अधिक हो सकती है ।
4. जब कोई वस्तु समान समय अंतराल में समान दूरियाँ तय करती है तो ऐसी गति को *एकसमान गति* कहते हैं । यदि ऐसा नहीं है तो गति *असमान* होती है ।
5. विस्थापन की अवधि के समय अंतराल द्वारा विस्थापन को विभाजित करने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे *औसत वेग* कहते हैं तथा इसे $\bar{v}$ द्वारा चिह्नित करते हैं;
   $$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
   $x - t$ ग्राफ में किसी दिए गए अंतराल की अवधि में औसत वेग उस सरल रेखा की प्रवणता है जो समय अंतराल की प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियों को जोड़ती है ।
6. वस्तु की यात्रा की अवधि में चली गई कुल पथ-लंबाई एवं इसमें लगे समय अंतराल अनुपात को *औसत चाल* कहते हैं। किसी वस्तु की औसत चाल किसी दिए गए समय अन्तराल में उसके औसत वेग के परिणाम के बराबर अथवा अधिक होती है।
7. जब समय अतंराल Δt अत्यल्प हो तो वस्तु के औसत वेग के सीमान्त मान को *तात्क्षणिक वेग* या केवल *वेग* कहते हैं :
   $$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$
   किसी क्षण वस्तु का वेग उस क्षण स्थान समय-ग्राफ की प्रवणता के बराबर होता है ।
8. वस्तु के वेग में परिवर्तन को संगत समय अंतराल से विभाजित करने पर जो राशि प्राप्त होती है, उसे *औसत त्वरण* कहते हैं :
   $$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
9. जब समय अंतराल अत्यल्प $\Delta t \to 0$ हो तो, वस्तु के औसत त्वरण के सीमान्त मान को *तात्क्षणिक त्वरण* या केवल *त्वरण* कहते हैं :
   $$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$
   किसी क्षण वस्तु का त्वरण उस क्षण वेग-समय ग्राफ की प्रवणता के बराबर होता है । एकसमान गति के लिए त्वरण शून्य होता है तथा x - t ग्राफ समय-अक्ष पर आनत एक सरल रेखा होती है । इसी प्रकार एकसमान गति के लिए v - t ग्राफ समय-अक्ष के समांतर सरल रेखा होती है । एकसमान त्वरण के लिए x - t ग्राफ परवलय होता है जबकि v - t ग्राफ समय-अक्ष के आनत एक सरल रेखा होती है ।
10. किन्हीं दो क्षणों t_1 तथा t_2 के मध्य खींचे गए वेग-समय वक्र के अंतर्गत आने वाला क्षेत्रफल वस्तु के विस्थापन के बराबर होता है ।
11. एकसमान त्वरण से गतिमान वस्तु के लिए कुछ सामान्य समीकरणों का एक समूह होता है जिससे पाँच राशियाँ यथा विस्थापन x, तत्संबंधित समय t, प्रारंभिक वेग v_o, अंतिम वेग v तथा त्वरण a एक दूसरे से संबंधित होते हैं । इन समीकरणों को वस्तु के शुद्धगतिक समीकरणों के नाम से जाना जाता है :
    $$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

इन समीकरणों में क्षण $t = 0$ पर वस्तु की स्थिति $x = 0$ ली गई है । यदि वस्तु $x = x_o$ से चलना प्रारंभ करे तो उपर्युक्त समीकरणों में x के स्थान पर $(x - x_o)$ लिखेंगे ।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
पथ-लंबाई		[L]	m	
विस्थपन	Δx	[L]	m	$= x_2 - x_1$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है ।
वेग (a) औसत (b) तात्क्षणिक	 $\bar{v}$ v	$[LT^{-1}]$	m s^{-1}	$= \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है
चाल (a) औसत (b) तात्क्षणिक		$[LT^{-1}]$	m s^{-1}	$= \frac{\text{पथ - लंबाई}}{\text{समय अंतराल}}$ $= \frac{dx}{dt}$
त्वरण (a) औसत (b) तात्क्षणिक	 $\bar{a}$ a	$[LT^{-2}]$	m s^{-2}	$= \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$ एक विमा में इसका चिह्न दिशा को इंगित करता है

विचारणीय विषय

1. मूल बिंदु तथा किसी अक्ष की धनात्मक दिशा का चयन अपनी रुचि का विषय है । आपको सबसे पहले इस चयन का उल्लेख कर देना चाहिए और इसी के बाद राशियों; जैसे- विस्थापन, वेग तथा त्वरण के चिह्नों का निर्धारण करना चाहिए।
2. यदि किसी वस्तु की चाल बढ़ती जा रही है तो त्वरण वेग की दिशा में होगा परंतु यदि चाल घटती जाती है तो त्वरण वेग की विपरीत दिशा में होगा । यह कथन मूल बिंदु तथा अक्ष के चुनाव पर निर्भर नहीं करता ।
3. त्वरण के चिह्न से हमें यह पता नहीं चलता कि वस्तु की चाल बढ़ रही है या घट रही है । त्वरण का चिह्न (जैसा कि उपरोक्त बिंदु 1 में बतलाया गया है) अक्ष के धनात्मक दिशा के चयन पर निर्भर करता है । उदाहरण के तौर पर यदि ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा को अक्ष की धनात्मक दिशा माना जाए तो गुरुत्वजनित त्वरण ऋणात्मक होगा । यदि कोई वस्तु गुरुत्व के कारण नीचे की ओर गिर रही है तो भी वस्तु की चाल बढ़ती जाएगी यद्यपि त्वरण का मान ऋणात्मक है। वस्तु ऊपर की दिशा में फेंकी जाए तो उसी ऋणात्मक (गुरुत्वजनित) त्वरण के कारण वस्तु की चाल में कमी आती जाएगी।

4. यदि किसी क्षण वस्तु का वेग शून्य है तो यह आवश्यक नहीं है कि उस क्षण उसका त्वरण भी शून्य हो । कोई वस्तु क्षणिक रूप से विरामावस्था में हो सकती है तथापि उस क्षण उसका त्वरण शून्य नहीं होगा । उदाहरणस्वरूप, यदि किसी वस्तु को ऊपर की ओर फेंका जाए तो शीर्षस्थ बिंदु पर उसका वेग तो शून्य होगा परंतु इस अवसर पर उसका त्वरण गुरुत्वजनित त्वरण ही होगा ।
5. गति संबंधी शुद्धगतिक समीकरणों [समीकरण (2.9)] की विभिन्न राशियाँ बीजगणितीय हैं अर्थात वे धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती हैं । ये समीकरण सभी परिस्थितियों (स्थिर त्वरण वाली एकविमीय गति) के लिए उपयुक्त होते हैं बशर्ते समीकरणों में विभिन्न राशियों के मान उपयुक्त चिह्नों के साथ रखे जाएँ ।
6. तात्क्षणिक वेग तथा त्वरण की परिभाषाएँ [समीकरण (2.1) तथा समीकरण (2.3)] यथार्थ हैं और सदैव सही हैं जबकि शुद्धगतिक समीकरण [समीकरण (2.9)] उन्हीं गतियों के लिए सही है जिनमें गति की अवधि में त्वरण का परिमाण और दिशा स्थिर रहते हैं ।

अभ्यास

2.1 नीचे दिए गए गति के कौन से उदाहरणों में वस्तु को लगभग बिंदु वस्तु माना जा सकता है :

(a) दो स्टेशनों के बीच बिना किसी झटके के चल रही कोई रेलगाड़ी ।

(b) किसी वृत्तीय पथ पर साइकिल चला रहे किसी व्यक्ति के ऊपर बैठा कोई बंदर ।

(c) जमीन से टकरा कर तेजी से मुड़ने वाली क्रिकेट की कोई फिरकती गेंद ।

(d) किसी मेज के किनारे से फिसल कर गिरा कोई बीकर ।

2.2 दो बच्चे A व B अपने विद्यालय O से लौट कर अपने-अपने घर क्रमशः P तथा Q को जा रहे हैं । उनके स्थिति-समय (x - t) ग्राफ चित्र 2.9 में दिखाए गए हैं । नीचे लिखे कोष्ठकों में सही प्रविष्टियों को चुनिए :

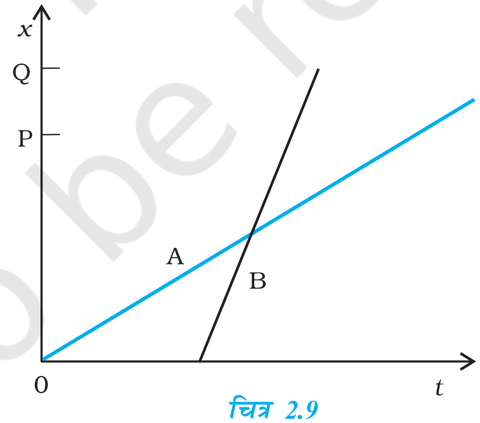
(a) B/A की तुलना में A/B विद्यालय से निकट रहता है ।

(b) B/A की तुलना में A/B विद्यालय से पहले चलता है ।

(c) B/A की तुलना A/B तेज चलता है ।

(d) A और B घर (एक ही/भिन्न) समय पर पहुँचते हैं ।

(e) A/B सड़क पर B/A से (एक बार/दो बार) आगे हो जाते हैं ।



चित्र 2.9

2.3 एक महिला अपने घर से प्रात: 9.00 बजे 2.5 km दूर अपने कार्यालय के लिए सीधी सड़क पर 5 km h^{-1} चाल से चलती है । वहाँ वह सायं 5.00 बजे तक रहती है और 25 km h^{-1} की चाल से चल रही किसी ऑटो रिक्शा द्वारा अपने घर लौट आती है । उपयुक्त पैमाना चुनिए तथा उसकी गति का x - t ग्राफ खींचिए ।

2.4 कोई शराबी किसी तंग गली में 5 कदम आगे बढ़ता है और 3 कदम पीछे आता है, उसके बाद फिर 5 कदम आगे बढ़ता है और 3 कदम पीछे आता है, और इसी तरह वह चलता रहता है । उसका हर कदम 1m लंबा है और 1s समय लगता है । उसकी गति का x - t ग्राफ खींचिए । ग्राफ से तथा किसी अन्य विधि से यह ज्ञात कीजिए कि वह जहां से चलना प्रारंभ करता है वहाँ से 13 m दूर किसी गड्ढे में कितने समय पश्चात गिरता है ।

2.5 कोई जेट वायुयान 500 km h^{-1} की चाल से चल रहा है और यह जेट यान के सापेक्ष 1500 km h^{-1} की चाल से अपने दहन उत्पादों को बाहर निकालता है । जमीन पर खड़े किसी प्रेक्षक के सापेक्ष इन दहन उत्पादों की चाल क्या होगी ?

2.6 सीधे राजमार्ग पर कोई कार 126 km h^{-1} की चाल से चल रही है । इसे 200 m की दूरी पर रोक दिया जाता है । कार के मंदन को एकसमान मानिए और इसका मान निकालिए । कार को रुकने में कितना समय लगा ?

2.7 कोई खिलाड़ी एक गेंद को ऊपर की ओर आरंभिक चाल 29 m s^{-1} से फेंकता है,

(i) गेंद की ऊपर की ओर गति के दौरान त्वरण की दिशा क्या होगी ?

(ii) इसकी गति के उच्चतम बिंदु पर गेंद के वेग व त्वरण क्या होंगे ?

(iii) गेंद के उच्चतम बिंदु पर स्थान व समय को $x = 0$ व $t = 0$ चुनिए, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर की दिशा को x-अक्ष की धनात्मक दिशा मानिए । गेंद की ऊपर की व नीचे की ओर गति के दौरान स्थिति, वेग व त्वरण के चिह्न बताइए ।

(iv) किस ऊँचाई तक गेंद ऊपर जाती है और कितनी देर के बाद गेंद खिलाड़ी के हाथों में आ जाती है ?

[$g = 9.8$ m s^{-2} तथा वायु का प्रतिरोध नगण्य है ।]

2.8 नीचे दिए गए कथनों को ध्यान से पढ़िए और कारण बताते हुए व उदाहरण देते हुए बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य, एकविमीय गति में किसी कण की

(a) किसी क्षण चाल शून्य होने पर भी उसका त्वरण अशून्य हो सकता है ।

(b) चाल शून्य होने पर भी उसका वेग अशून्य हो सकता है ।

(c) चाल स्थिर हो तो त्वरण अवश्य ही शून्य होना चाहिए ।

(d) चाल अवश्य ही बढ़ती रहेगी, यदि उसका त्वरण धनात्मक हो ।

2.9 किसी गेंद को 90 m की ऊँचाई से फर्श पर गिराया जाता है । फर्श के साथ प्रत्येक टक्कर में गेंद की चाल 1/10 कम हो जाती है । इसकी गति का $t = 0$ से 12 s के बीच चाल-समय ग्राफ खींचिए ।

2.10 उदाहरण सहित निम्नलिखित के बीच के अंतर को स्पष्ट कीजिए :

(a) किसी समय अंतराल में विस्थापन के परिमाण (जिसे कभी-कभी दूरी भी कहा जाता है) और किसी कण द्वारा उसी अंतराल के दौरान तय किए गए पथ की कुल लंबाई ।

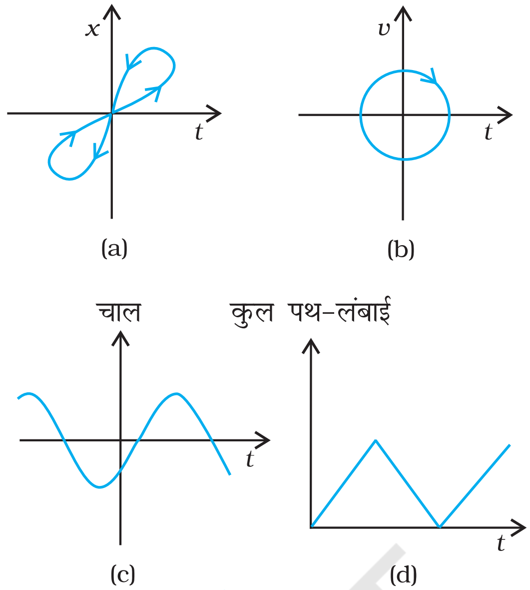
(b) किसी समय अंतराल में औसत वेग के परिमाण और उसी अंतराल में औसत चाल (किसी समय अंतराल में किसी कण की औसत चाल को समय अंतराल द्वारा विभाजित की गई कुल पथ-लंबाई के रूप में परिभाषित किया जाता है) । प्रदर्शित कीजिए कि (a) व (b) दोनों में ही दूसरी राशि पहली से अधिक या उसके बराबर है । समता का चिह्न कब सत्य होता है ? (सरलता के लिए केवल एकविमीय गति पर विचार कीजिए ।)

2.11 कोई व्यक्ति अपने घर से सीधी सड़क पर 5 km h^{-1} की चाल से 2.5 km दूर बाजार तक पैदल चलता है । परंतु बाजार बंद देखकर वह उसी क्षण वापस मुड़ जाता है तथा 7.5 km h^{-1} की चाल से घर लौट आता है ।

समय अंतराल (i) 0 - 30 मिनट, (ii) 0 - 50 मिनट, (iii) 0 - 40 मिनट की अवधि में उस व्यक्ति (a) के माध्य वेग का परिमाण, तथा (b) का माध्य चाल क्या है? (नोट : आप इस उदाहरण से समझ सकेंगे कि औसत चाल को औसत-वेग के परिमाण के रूप में परिभाषित करने की अपेक्षा समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई के रूप में परिभाषित करना अधिक अच्छा क्यों है । आप थक कर घर लौटे उस व्यक्ति को यह बताना नहीं चाहेंगे कि उसकी औसत चाल शून्य थी ।)

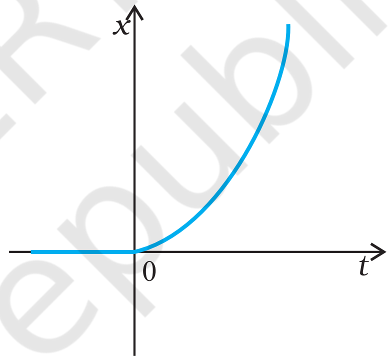
2.12 हमने अभ्यास 2.9 तथा 2.10 में औसत चाल व औसत वेग के परिमाण के बीच के अंतर को स्पष्ट किया है । यदि हम तात्क्षणिक चाल व वेग के परिमाण पर विचार करते हैं तो इस तरह का अंतर करना आवश्यक नहीं होता । तात्क्षणिक चाल हमेशा तात्क्षणिक वेग के बराबर होती है । क्यों ?

2.13 चित्र 2.10 में (a) से (d) तक के ग्राफों को ध्यान से देखिए और देखकर बताइए कि इनमें से कौन-सा ग्राफ एकविमीय गति को संभवत: नहीं दर्शा सकता ।



चित्र 2.10

2.14 चित्र 2.11 में किसी कण की एकविमीय गति का x - t ग्राफ दिखाया गया है । ग्राफ से क्या यह कहना ठीक होगा कि यह कण $t < 0$ के लिए किसी सरल रेखा में और $t > 0$ के लिए किसी परवलीय पथ में गति करता है । यदि नहीं, तो ग्राफ के संगत किसी उचित भौतिक संदर्भ का सुझाव दीजिए ।

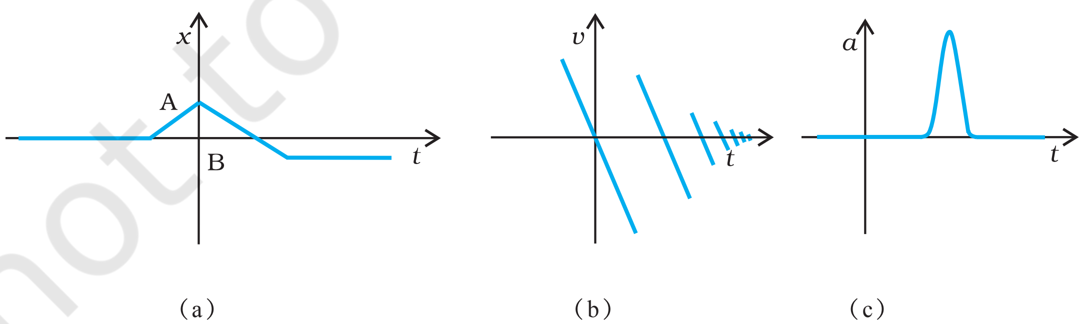


चित्र 2.11

2.15 किसी राजमार्ग पर पुलिस की कोई गाड़ी 30 km/h की चाल से चल रही है और यह उसी दिशा में 192 km/h की चाल से जा रही किसी चोर की कार पर गोली चलाती है । यदि गोली की नाल मुखी चाल 150 m s^{-1} है तो चोर की कार को गोली किस चाल के साथ आघात करेगी ?

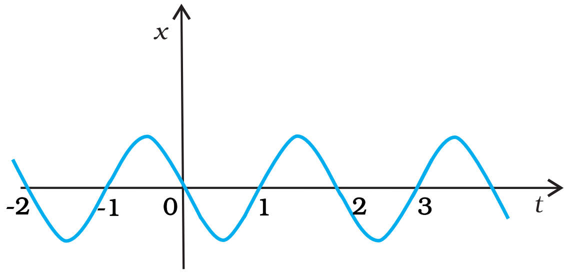
(नोट : उस चाल को ज्ञात कीजिए जो चोर की कार को हानि पहुँचाने में प्रासंगिक हो) ।

2.16 चित्र 2.12 में दिखाए गए प्रत्येक ग्राफ के लिए किसी उचित भौतिक स्थिति का सुझाव दीजिए :



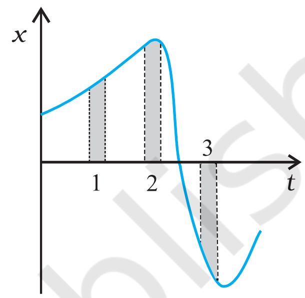
चित्र 2.12

2.17 चित्र 2.13 में किसी कण की एकविमीय सरल आवर्ती गति के लिए x - t ग्राफ दिखाया गया है । (इस गति के बारे में आप अध्याय 13 में पढ़ेंगे) समय $t = 0.3$ s, 1.2 s, –1.2 s पर कण के स्थिति, वेग व त्वरण के चिह्न क्या होंगे ?



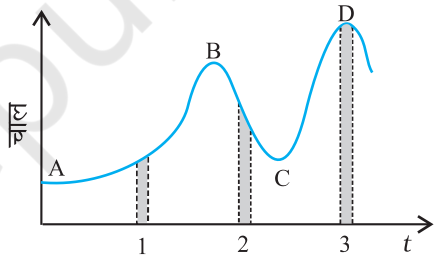
चित्र 2.13

2.18 चित्र 2.14 किसी कण की एकविमीय गति का x - t ग्राफ दर्शाता है । इसमें तीन समान अंतराल दिखाए गए हैं । किस अंतराल में औसत चाल अधिकतम है और किसमें न्यूनतम है ? प्रत्येक अंतराल के लिए औसत वेग का चिह्न बताइए ।



चित्र 2.14

2.19 चित्र 2.15 में किसी नियत (स्थिर) दिशा के अनुदिश चल रहे कण का चाल-समय ग्राफ दिखाया गया है । इसमें तीन समान समय अंतराल दिखाए गए हैं । किस अंतराल में औसत त्वरण का परिमाण अधिकतम होगा ? किस अंतराल में औसत चाल अधिकतम होगी ? धनात्मक दिशा को गति की स्थिर दिशा चुनते हुए तीनों अंतरालों में v तथा a के चिह्न बताइए । A, B, C, व D बिंदुओं पर त्वरण क्या होंगे ?



चित्र 2.15

11088CH04

अध्याय 3

समतल में गति

3.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमने स्थिति, विस्थापन, वेग एवं त्वरण की धारणाओं को विकसित किया था, जिनकी किसी वस्तु की सरल रेखीय गति का वर्णन करने के लिए आवश्यकता पड़ती है । क्योंकि एकविमीय गति में मात्र दो ही दिशाएँ संभव हैं, इसलिए इन राशियों के दिशात्मक पक्ष को + और – चिह्नों से व्यक्त कर सकते हैं । परंतु जब हम वस्तुओं की गति का द्विविमीय (एक समतल) या त्रिविमीय (दिक्स्थान) वर्णन करना चाहते हैं, तब हमें उपर्युक्त भौतिक राशियों का अध्ययन करने के लिए सदिशों की आवश्यकता पड़ती है । अतएव सर्वप्रथम हम सदिशों की भाषा (अर्थात सदिशों के गुणों एवं उन्हें उपयोग में लाने की विधियाँ) सीखेंगे । सदिश क्या है ? सदिशों को कैसे जोड़ा, घटाया या गुणा किया जाता है ? सदिशों को किसी वास्तविक संख्या से गुणा करें तो हमें क्या परिणाम मिलेगा ? यह सब हम इसलिए सीखेंगे जिससे किसी समतल में वस्तु के वेग एवं त्वरण को परिभाषित करने के लिए हम सदिशों का उपयोग कर सकें । इसके बाद हम किसी समतल में वस्तु की गति पर परिचर्चा करेंगे । किसी समतल में गति के सरल उदाहरण के रूप में हम एकसमान त्वरित गति का अध्ययन करेंगे तथा एक प्रक्षेप्य की गति के विषय में विस्तार से पढ़ेंगे । वृत्तीय गति से हम भलीभाँति परिचित हैं जिसका हमारे दैनिक जीवन में विशेष महत्त्व है । हम एकसमान वृत्तीय गति की कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे ।

हम इस अध्याय में जिन समीकरणों को प्राप्त करेंगे उन्हें आसानी से त्रिविमीय गति के लिए विस्तारित किया जा सकता है ।

3.2 अदिश एवं सदिश

हम भौतिक राशियों को अदिशों एवं सदिशों में वर्गीकृत करते हैं । दोनों में मूल अंतर यह है कि सदिश के साथ **दिशा** को संबद्ध करते हैं वहीं अदिश के साथ ऐसा नहीं करते । एक अदिश राशि वह राशि है जिसमें मात्र परिमाण होता है । इसे केवल एक संख्या एवं उचित मात्रक द्वारा पूर्ण रूप से व्यक्त किया जा सकता है । इसके उदाहरण हैं : दो बिंदुओं के बीच की दूरी, किसी वस्तु की संहति (द्रव्यमान), किसी वस्तु का तापक्रम, तथा वह समय जिस पर कोई घटना घटती है । अदिशों के जोड़ में वही नियम लागू होते हैं जो सामान्यतया बीजगणित में । अदिशों को हम ठीक वैसे ही जोड़ सकते हैं, घटा सकते हैं, गुणा या भाग कर सकते हैं जैसा कि हम सामान्य संख्याओं के साथ

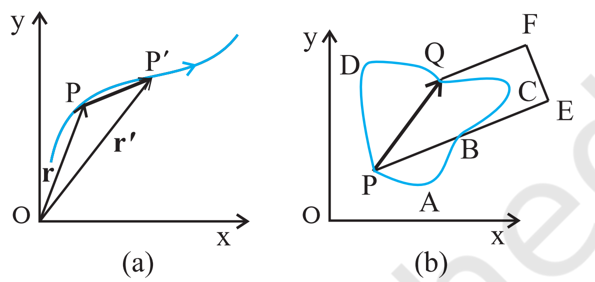
करते हैं* । उदाहरण के लिए, यदि किसी आयत की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 1.0 m तथा 0.5 m है तो उसकी परिमाप चारों भुजाओं के योग, 1.0 m + 0.5 m + 1.0 m + 0.5 m = 3.0 m होगा। हर भुजा की लंबाई एक अदिश है तथा परिमाप भी एक अदिश है । हम एक दूसरे उदाहरण पर विचार करेंगे : यदि किसी एक दिन का अधिकतम एवं न्यूनतम ताप क्रमशः 35.6 °C तथा 24.2 °C है तो इन दोनों का अंतर 11.4 °C होगा । इसी प्रकार यदि एल्युमिनियम के किसी एकसमान ठोस घन की भुजा 10 cm है और उसका द्रव्यमान 2.7 kg है तो उसका आयतन $10^{-3}\,m^3$ (एक अदिश) होगा तथा घनत्व $2.7 \times 10^3\,kg/m^3$ भी एक अदिश है ।

एक **सदिश** राशि वह राशि है जिसमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं तथा वह **योग संबंधी त्रिभुज के नियम** अथवा **समानान्तर चतुर्भुज के योग संबंधी नियम** का पालन करती है । इस प्रकार, एक सदिश को उसके परिमाण की संख्या तथा दिशा द्वारा व्यक्त करते हैं । कुछ भौतिक राशियाँ जिन्हें सदिशों द्वारा व्यक्त करते हैं, वे हैं विस्थापन, वेग, त्वरण तथा बल ।

सदिश को व्यक्त करने के लिए इस पुस्तक में हम मोटे अक्षरों का प्रयोग करेंगे । जैसे कि वेग सदिश को व्यक्त करने के लिए **v** चिह्न का प्रयोग करेंगे । परंतु हाथ से लिखते समय क्योंकि मोटे अक्षरों का लिखना थोड़ा मुश्किल होता है, इसलिए एक सदिश को अक्षर के ऊपर तीर लगाकर व्यक्त करते हैं, जैसे $\vec{v}$ । इस प्रकार **v** तथा $\vec{v}$ दोनों ही वेग सदिश को व्यक्त करते हैं । किसी सदिश के परिमाण को प्रायः हम उसका 'परम मान' कहते हैं और उसे $|\mathbf{v}| = v$ द्वारा व्यक्त करते हैं । इस प्रकार एक सदिश को हम मोटे अक्षर यथा **A** या **a, p, q, r,** ..... **x, y** से व्यक्त करते हैं जबकि इनके परिमाणों को क्रमशः हम *A* या *a, p, q, r,* .... *x, y* द्वारा व्यक्त करते हैं ।

3.2.1 स्थिति एवं विस्थापन सदिश

किसी समतल में गतिमान वस्तु की स्थिति व्यक्त करने के लिए हम सुविधानुसार किसी बिंदु O को मूल बिंदु के रूप में चुनते हैं । कल्पना कीजिए कि दो भिन्न-भिन्न समयों t और t' पर वस्तु की स्थिति क्रमशः P और P′ है (चित्र 3.1a) । हम P को O से एक सरल रेखा से जोड़ देते हैं । इस प्रकार **OP** समय t पर वस्तु की स्थिति सदिश होगी । इस रेखा के सिरे पर एक तीर का निशान लगा देते हैं । इसे किसी चिह्न (मान लीजिए) **r** से निरूपित करते हैं, अर्थात् **OP** = **r** । इसी प्रकार बिंदु P′ को एक दूसरे स्थिति सदिश **OP′** यानी **r′** से निरूपित करते हैं। सदिश **r** की लंबाई उसके परिमाण को निरूपित करती है तथा सदिश की दिशा वह होगी जिसके अनुदिश P (बिंदु O से देखने पर) स्थित होगा । यदि वस्तु P से चलकर P′ पर पहुंच जाती है तो सदिश **PP′** (जिसकी पुच्छ P पर तथा शीर्ष P′ पर है) बिंदु P (समय t) से P′ (समय t') तक गति के संगत **विस्थापन सदिश** कहलाता है ।



चित्र 3.1 (a) स्थिति तथा विस्थापन सदिश, (b) विस्थापन सदिश **PQ** *तथा गति के भिन्न-भिन्न मार्ग ।*

यहाँ यह बात महत्वपूर्ण है कि 'विस्थापन सदिश' को एक सरल रेखा से व्यक्त करते हैं जो वस्तु की अंतिम स्थिति को उसकी प्रारम्भिक स्थिति से जोड़ती है तथा यह उस वास्तविक पथ पर निर्भर नहीं करता जो वस्तु द्वारा बिंदुओं के मध्य चला जाता है । उदाहरणस्वरूप, जैसा कि चित्र 3.1b में दिखाया गया है, प्रारम्भिक स्थिति P तथा अंतिम स्थिति Q के मध्य विस्थापन सदिश **PQ** यद्यपि वही है परंतु दोनों स्थितियों के बीच चली गई दूरियां जैसे PABCQ, PDQ तथा PBEFQ अलग-अलग हैं । इसी प्रकार, ***किन्हीं दो बिंदुओं के मध्य विस्थापन सदिश का परिमाण या तो गतिमान वस्तु की पथ-लंबाई से कम होता है या उसके बराबर होता है।*** पिछले अध्याय में भी एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान वस्तु के लिए इस तथ्य को भलीभांति समझाया गया था ।

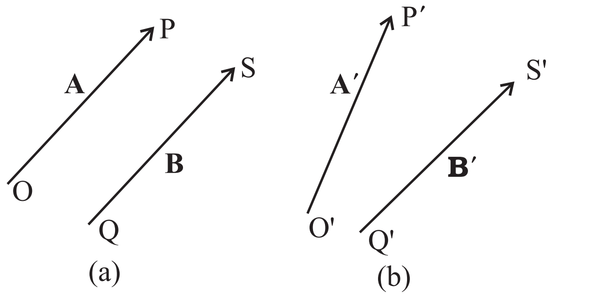
3.2.2 सदिशों की समता

दो सदिशों **A** तथा **B** को केवल तभी बराबर कहा जा सकता है जब उनके परिमाण बराबर हों तथा उनकी दिशा समान हो** ।

चित्र 3.2(a) में दो समान सदिशों **A** तथा **B** को दर्शाया गया है । हम इनकी समानता की परख आसानी से कर सकते हैं । **B** को स्वयं के समांतर खिसकाइये ताकि उसकी पुच्छ Q सदिश **A** की पुच्छ O के संपाती हो जाए । फिर क्योंकि उनके शीर्ष S एवं P भी संपाती हैं अतः दोनों सदिश बराबर कहलाएंगे । सामान्यतया इस समानता को **A** = **B** के रूप में लिखते हैं । इस

* *केवल समान मात्रक वाली राशियों का जोड़ व घटाना सार्थक होता है । जबकि आप भिन्न मात्रकों वाले अदिशों का गुणा या भाग कर सकते हैं।*

** *हमारे अध्ययन में सदिशों की स्थितियां निर्धारित नहीं हैं । इसलिए जब एक सदिश को स्वयं के समांतर विस्थापित करते हैं तो सदिश अपरिवर्तित रहता है । इस प्रकार के सदिशों को हम 'मुक्त सदिश' कहते हैं । हालांकि कुछ भौतिक उपयोगों में सदिश की स्थिति या उसकी क्रिया रेखा महत्त्वपूर्ण होती है। ऐसे सदिशों को हम 'स्थानगत सदिश' कहते हैं।*



चित्र 3.2 *(a) दो समान सदिश* **A** *तथा* **B**, *(b) दो सदिश* **A′** *व* **B′** *असमान हैं यद्यपि उनकी लंबाइयाँ वही हैं ।*

बात की ओर ध्यान दीजिए कि चित्र 3.2(b) में यद्यपि सदिशों **A′** तथा **B′** के परिमाण समान हैं फिर भी दोनों सदिश समान नहीं हैं क्योंकि उनकी दिशायें अलग-अलग हैं । यदि हम **B′** को उसके ही समांतर खिसकाएं जिससे उसकी पुच्छ Q′, **A′** की पुच्छ O′ से संपाती हो जाए तो भी **B′** का शीर्ष S′, **A′** के शीर्ष P′ का संपाती नहीं होगा ।

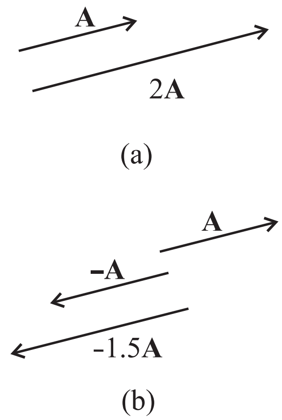
3.3 सदिशों की वास्तविक संख्या से गुणा

यदि एक सदिश **A** को किसी धनात्मक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक सदिश ही मिलता है जिसका परिमाण सदिश **A** के परिमाण का λ गुना हो जाता है तथा जिसकी दिशा वही है जो **A** की है । इस गुणनफल को हम λ**A** से लिखते हैं ।

$|\lambda \mathbf{A}| = \lambda |\mathbf{A}|$ यदि $\lambda > 0$

उदाहरणस्वरूप, यदि **A** को 2 से गुणा किया जाए, तो परिणामी सदिश 2**A** होगा (चित्र 3.3a) जिसकी दिशा **A** की दिशा होगी तथा परिमाण |**A**| का दोगुना होगा । सदिश **A** को यदि एक ऋणात्मक संख्या $-\lambda$ से गुणा करें तो एक अन्य सदिश प्राप्त होता है जिसकी दिशा **A** की दिशा के विपरीत है और जिसका परिमाण |**A**| का λ गुना होता है ।

यदि किसी सदिश **A** को ऋणात्मक संख्याओं –1 व –1.5 से गुणा करें तो परिणामी सदिश चित्र 3.3(b) जैसे होंगे ।

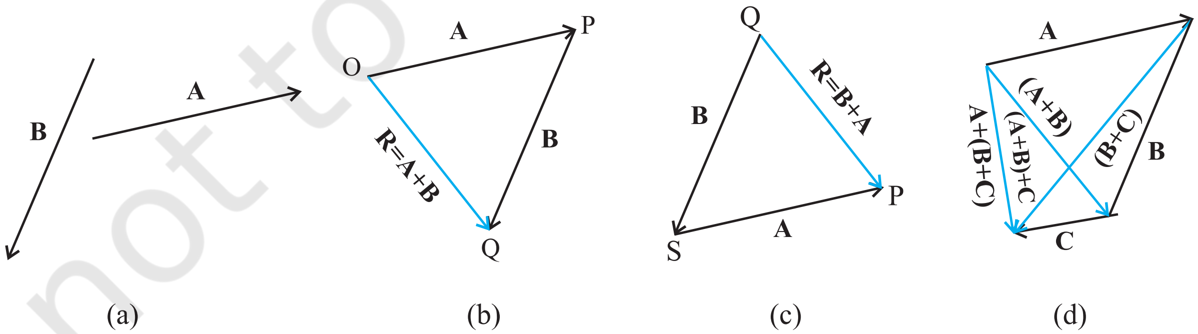


चित्र 3.3 *(a) सदिश* **A** *तथा उसे धनात्मक संख्या दो से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश, (b) सदिश* **A** *तथा उसे ऋणात्मक संख्याओं -1 तथा -1.5 से गुणा करने पर प्राप्त परिणामी सदिश ।*

भौतिकी में जिस घटक λ द्वारा सदिश **A** को गुणा किया जाता है वह कोई अदिश हो सकता है जिसकी स्वयं की विमाएँ होती हैं । अतएव λ**A** की विमाएँ λ व **A** की विमाओं के गुणनफल के बराबर होंगी । उदाहरणस्वरूप, यदि हम किसी अचर वेग सदिश को किसी (समय) अंतराल से गुणा करें तो हमें एक विस्थापन सदिश प्राप्त होगा ।

3.4 सदिशों का संकलन व व्यवकलन : ग्राफी विधि

जैसा कि खण्ड 3.2 में बतलाया जा चुका है कि सदिश योग के त्रिभुज नियम या समान्तर चतुर्भुज के योग के नियम का पालन करते हैं । अब हम ग्राफी विधि द्वारा योग के इस नियम को समझाएंगे । हम चित्र 3.4 (a) में दर्शाए अनुसार किसी समतल में स्थित दो सदिशों **A** तथा **B** पर विचार करते हैं । इन सदिशों को व्यक्त करने वाली रेखा-खण्डों की लंबाइयाँ सदिशों के परिमाण के समानुपाती हैं । योग **A** + **B** प्राप्त करने के लिए चित्र 3.4(b) के अनुसार हम सदिश **B** इस प्रकार रखते हैं कि उसकी पुच्छ सदिश **A** के शीर्ष पर हो । फिर हम **A** की पुच्छ



चित्र 3.4 *(a) सदिश* **A** *तथा* **B**, *(b) सदिशों* **A** *व* **B** *का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (c) सदिशों* **B** *व* **A** *का ग्राफी विधि द्वारा जोड़ना, (d) सदिशों के जोड़ से संबंधित साहचर्य नियम का प्रदर्शन ।*

को **B** के सिरे से जोड़ देते हैं । यह रेखा OQ परिणामी सदिश **R** को व्यक्त करती है जो सदिशों **A** तथा **B** का योग है। क्योंकि सदिशों के जोड़ने की इस विधि में सदिशों में से किसी एक के शीर्ष को दूसरे की पुच्छ से जोड़ते हैं, इसलिए इस ग्राफी विधि को **शीर्ष व पुच्छ विधि** के नाम से जाना जाता है । दोनों सदिश तथा उनका परिणामी सदिश किसी त्रिभुज की तीन भुजाएं बनाते हैं । इसलिए इस विधि को **सदिश योग के त्रिभुज नियम** भी कहते हैं । यदि हम **B+A** का परिणामी सदिश प्राप्त करें तो भी हमें वही सदिश **R** प्राप्त होता है (चित्र 3.4c)। इस प्रकार सदिशों का योग **'क्रम विनिमेय'** (सदिशों के जोड़ने में यदि उनका क्रम बदल दें तो भी परिणामी सदिश नहीं बदलता) है ।

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{3.1}$$

सदिशों का योग *साहचर्य नियम* का भी पालन करता है जैसा कि चित्र 3.4 (d) में दर्शाया गया है । सदिशों **A** व **B** को पहले जोड़कर और फिर सदिश **C** को जोड़ने पर जो परिणाम प्राप्त होता है वह वही है जो सदिशों **B** और **C** को पहले जोड़कर फिर **A** को जोड़ने पर मिलता है, अर्थात्

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \tag{3.2}$$

दो समान और विपरीत सदिशों को जोड़ने पर क्या परिणाम मिलता है ? हम दो सदिशों **A** और –**A** जिन्हें चित्र 3.3(b) में दिखलाया है, पर विचार करते हैं । इनका योग **A** + (–**A**) है। क्योंकि दो सदिशों का परिमाण वही है किन्तु दिशा विपरीत है, इसलिए परिणामी सदिश का परिमाण **शून्य** होगा और इसे **0** से व्यक्त करते हैं।

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{0}| = 0 \tag{3.3}$$

0 को हम **शून्य सदिश** कहते हैं । क्योंकि शून्य सदिश का परिमाण शून्य होता है, इसलिए इसकी दिशा का निर्धारण नहीं किया जा सकता है । दरअसल जब हम एक सदिश **A** को संख्या शून्य से गुणा करते हैं तो भी परिणामस्वरूप हमें एक सदिश ही मिलेगा किन्तु उसका परिमाण शून्य होगा । **0** सदिश के मुख्य गुण निम्न हैं:

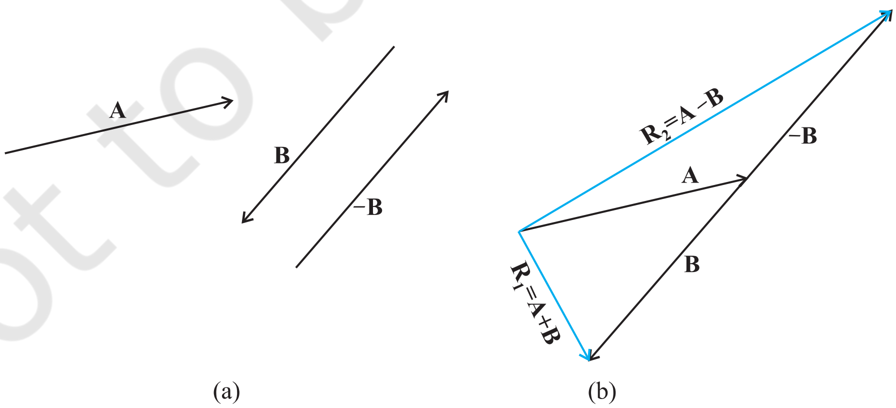
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\, \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

शून्य सदिश का भौतिक अर्थ क्या है ? जैसाकि चित्र 3.1(a) में दिखाया गया है हम किसी समतल में स्थिति एवं विस्थापन सदिशों पर विचार करते हैं । मान लीजिए कि किसी क्षण t पर कोई वस्तु P पर है । वह P′ तक जाकर पुनः P पर वापस आ जाती है । इस स्थिति में वस्तु का विस्थापन क्या होगा ? चूंकि प्रारंभिक एवं अंतिम स्थितियां संपाती हो जाती हैं, इसलिए विस्थापन "शून्य सदिश" होगा ।

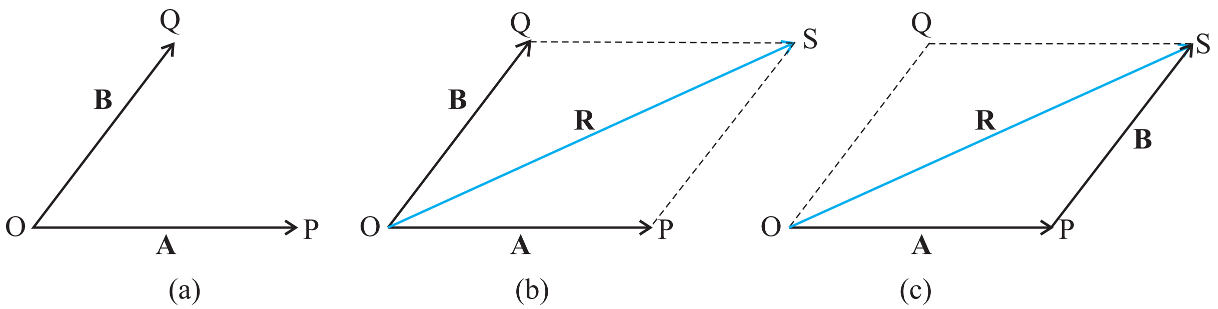
सदिशों का व्यवकलन सदिशों के योग के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है । दो सदिशों **A** व **B** के अंतर को हम दो सदिशों **A** व –**B** के योग के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{3.5}$$

इसे चित्र 3.5 में दर्शाया गया है । सदिश –**B** को सदिश **A** में जोड़कर $\mathbf{R}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})$ प्राप्त होता है । तुलना के लिए इसी चित्र में सदिश $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ को भी दिखाया गया है । **समान्तर चतुर्भुज विधि** को प्रयुक्त करके भी हम दो सदिशों का योग ज्ञात कर सकते हैं । मान लीजिए हमारे पास दो सदिश **A** व **B** हैं। इन सदिशों को जोड़ने के लिए उनकी पुच्छ को एक उभयनिष्ठ मूल बिंदु O पर लाते हैं जैसा चित्र 3.6(a) में दिखाया गया है। फिर हम **A** के शीर्ष से **B** के समांतर एक रेखा खींचते हैं और **B** के शीर्ष से **A** के समांतर एक दूसरी रेखा खींचकर समांतर चतुर्भुज OQSP पूरा करते हैं । जिस बिंदु पर यह दोनों रेखाएं एक दूसरे को काटती हैं, उसे मूल बिंदु O से जोड़ देते हैं। परिणामी सदिश **R** की दिशा समान्तर चतुर्भुज के मूल बिंदु O से कटान बिंदु S की ओर खींचे गए विकर्ण OS के अनुदिश होगी [चित्र 3.6 (b)]। चित्र 3.6 (c) में सदिशों **A** व **B** का परिणामी निकालने के लिए त्रिभुज नियम का उपयोग दिखाया गया है । दोनों चित्रों से स्पष्ट है कि दोनों विधियों से एक ही परिणाम निकलता है । इस प्रकार दोनों विधियाँ समतुल्य हैं।

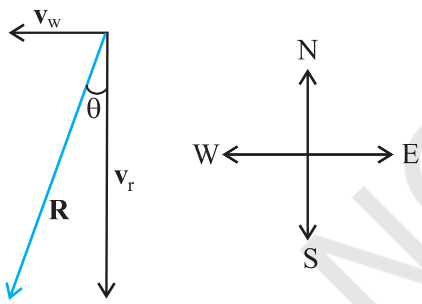


चित्र 3.5 (a) दो सदिश **A** *व* **B**, –**B** *को भी दिखाया गया है । (b) सदिश* **A** *से सदिश* **B** *का घटाना-परिणाम* $\mathbf{R}_2$ *है । तुलना के लिए सदिशों* **A** *व* **B** *का योग* $\mathbf{R}_1$ *भी दिखलाया गया है ।*



चित्र 3.6 *(a) एक ही उभयनिष्ठ बिंदु वाले दो सदिश* **A** *व* **B** पर, *(b) समान्तर चतुर्भुज विधि द्वारा* **A+B** *योग प्राप्त करना, (c) दो सदिशों को जोड़ने की समान्तर चतुर्भुज विधि त्रिभुज विधि के समतुल्य है ।*

▶ ***उदाहरण 3.1*** किसी दिन वर्षा 35 m s^{-1} की चाल से ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर हो रही है । कुछ देर बाद हवा 12 m s^{-1} की चाल से पूर्व से पश्चिम दिशा की ओर चलने लगती है । बस स्टाप पर खड़े किसी लड़के को अपना छाता किस दिशा में करना चाहिए ?



चित्र 3.7

हल : वर्षा एवं हवा के वेगों को सदिशों $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ से चित्र 3.7 में दर्शाया गया है। इनकी दिशाएं प्रश्न के अनुसार प्रदर्शित की गई हैं । सदिशों के योग के नियम के अनुसार $\mathbf{v}_r$ तथा $\mathbf{v}_w$ का परिणामी **R** चित्र में खींचा गया है । **R** का परिमाण होगा–

$$R = \sqrt{v_r^2 + v_w^2} = \sqrt{35^2 + 12^2} \text{ m s}^{-1} = 37 \text{ m s}^{-1}$$

ऊर्ध्वाधर से R की दिशा θ होगी–

$$\tan\theta = \frac{v_w}{v_r} = \frac{12}{35} = 0.343$$

या $\theta = \tan^{-1}(0.343) = 19$

अतएव लड़के को अपना छाता ऊर्ध्वाधर तल में ऊर्ध्वाधर से 19 का कोण बनाते हुए पूर्व दिशा की ओर रखना चाहिए । ◀

3.5 सदिशों का वियोजन

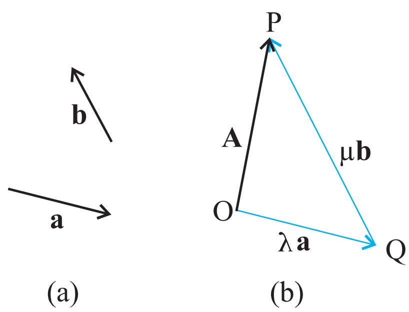
मान लीजिए कि **a** व **b** किसी समतल में भिन्न दिशाओं वाले दो शून्येतर (शून्य नहीं) सदिश हैं तथा **A** इसी समतल में कोई अन्य सदिश है । (चित्र 3.8) तब **A** को दो सदिशों के योग के रूप में वियोजित किया जा सकता है । एक सदिश **a** के किसी वास्तविक संख्या के गुणनफल के रूप में और इसी प्रकार दूसरा सदिश **b** के गुणनफल के रूप में है । ऐसा करने के लिए पहले **A** खींचिए जिसका पुच्छ O तथा शीर्ष P है । फिर O से **a** के समांतर एक सरल रेखा खींचिए तथा P से एक सरल रेखा **b** के समांतर खींचिए । मान लीजिए वे एक दूसरे को Q पर काटती हैं । तब,

$$\mathbf{A} = \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} \quad (3.6)$$

परंतु क्योंकि **OQ**, **a** के समांतर है तथा **Q P**, **b** के समांतर है इसलिए

$$\mathbf{O\,Q} = \lambda\,\mathbf{a} \text{ तथा } \mathbf{QP} = \mu\mathbf{b} \quad (3.7)$$

जहां λ तथा μ कोई वास्तविक संख्याएँ हैं ।



चित्र 3.8 *(a) दो अरैखिक सदिश* **a** *व* **b**, *(b) सदिश* **A** *का* **a** *व* **b** *के पदों में वियोजन ।*

अत: $\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b} \quad (3.8)$

हम कह सकते हैं कि **A** को **a** व **b** के अनुदिश दो

सदिश-घटकों क्रमशः $\lambda\mathbf{a}$ तथा $\mu\mathbf{b}$ में वियोजित कर दिया गया है । इस विधि का उपयोग करके हम किसी सदिश को उसी समतल के दो सदिश-घटकों में वियोजित कर सकते हैं । एकांक परिमाण के सदिशों की सहायता से समकोणिक निर्देशांक निकाय के अनुदिश किसी सदिश का वियोजन सुविधाजनक होता है । ऐसे सदिशों को *एकांक सदिश* कहते हैं जिस पर अब हम परिचर्चा करेंगे ।

एकांक सदिश : एकांक सदिश वह सदिश होता है जिसका परिमाण एक हो तथा जो किसी विशेष दिशा के अनुदिश हो । न तो इसकी कोई विमा होती है और न ही कोई मात्रक । मात्र दिशा व्यक्त करने के लिए इसका उपयोग होता है । चित्र 3.9a में प्रदर्शित एक 'आयतीय निर्देशांक निकाय' की x, y तथा z अक्षों के अनुदिश एकांक सदिशों को हम क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा व्यक्त करते हैं । क्योंकि ये सभी एकांक सदिश हैं, इसलिए

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1 \qquad (3.9)$$

ये एकांक सदिश एक दूसरे के लंबवत् हैं । दूसरे सदिशों से इनकी अलग पहचान के लिए हमने इस पुस्तक में मोटे टाइप **i, j, k** के ऊपर एक कैप (^) लगा दिया है । क्योंकि इस अध्याय में हम केवल द्विविमीय गति का ही अध्ययन कर रहे हैं अतः हमें केवल दो एकांक सदिशों की आवश्यकता होगी ।

यदि किसी एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ को एक अदिश λ से गुणा करें तो परिणामी एक सदिश $\lambda\hat{\mathbf{n}}$ होगा । सामान्यतया किसी सदिश **A** को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\hat{\mathbf{n}} \qquad (3.10)$$

यहाँ **A** के अनुदिश $\hat{\mathbf{n}}$ एकांक सदिश है ।

हम किसी सदिश **A** को एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ के पदों में वियोजित कर सकते हैं । मान लीजिए कि चित्र (3.9b) के अनुसार सदिश **A** समतल x-y में स्थित है । चित्र 3.9(b) के अनुसार **A** के शीर्ष से हम निर्देशांक अक्षों पर लंब खींचते हैं । इससे हमें दो सदिश $\mathbf{A_1}$ व $\mathbf{A_2}$ इस प्रकार प्राप्त हैं कि $\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} = \mathbf{A}$ । क्योंकि $\mathbf{A_1}$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ के समान्तर है तथा $\mathbf{A_2}$ एकांक सदिश $\hat{\mathbf{j}}$ के समान्तर है, अतः

$$\mathbf{A_1} = A_x\,\hat{\mathbf{i}}\,,\ \mathbf{A_2} = A_y\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.11)$$

यहाँ A_x तथा A_y वास्तविक संख्याएँ हैं ।

इस प्रकार $\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ (3.12)

इसे चित्र (3.9c) में दर्शाया गया है । राशियों A_x व A_y को हम सदिश **A** के x- व y- घटक कहते हैं । यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि A_x सदिश नहीं है, वरन् $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ एक सदिश है । इसी प्रकार $A_y\,\hat{\mathbf{j}}$ एक सदिश है ।

त्रिकोणमिति का उपयोग करके A_x व A_y को **A** के परिमाण तथा उसके द्वारा x-अक्ष के साथ बनने वाले कोण θ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं :

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta \qquad (3.13)$$

समीकरण (3.13) से स्पष्ट है कि किसी सदिश का घटक कोण θ पर निर्भर करता है तथा वह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

किसी समतल में एक सदिश **A** को व्यक्त करने के लिए अब हमारे पास दो विधियाँ हैं :

(i) उसके परिमाण A तथा उसके द्वारा x-अक्ष के साथ बनाए गए कोण θ द्वारा, अथवा

(ii) उसके घटकों A_x तथा A_y द्वारा ।

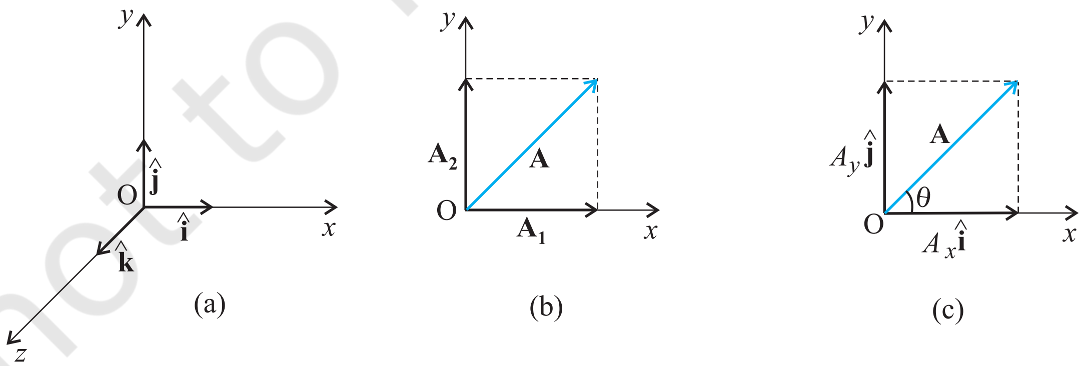
यदि A तथा θ हमें ज्ञात हैं तो A_x और A_y का मान समीकरण (3.13) से ज्ञात किया जा सकता है । यदि A_x एवं A_y ज्ञात हों तो A तथा θ का मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = A^2$$

$$\text{अथवा}\quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (3.14)$$

$$\text{एवं}\quad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x},\ \theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (3.15)$$

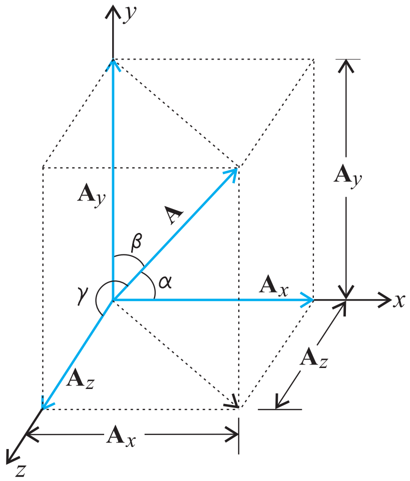
अभी तक इस विधि में हमने एक (x-y) समतल में किसी सदिश को उसके घटकों में वियोजित किया है किन्तु इसी



चित्र 3.9 *(a) एकांक सदिश* $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ *अक्षों* x, y, z *के अनुदिश है, (b) किसी सदिश* **A** *को* x *एवं* y *अक्षों के अनुदिश घटकों* A_1 *तथा* A_2 *में वियोजित किया है, (c)* A_1 *तथा* A_2 *को* $\hat{\mathbf{i}}$ *तथा* $\hat{\mathbf{j}}$ *के पदों में व्यक्त किया है ।*

विधि द्वारा किसी सदिश **A** को तीन विमाओं में x, y तथा z अक्षों के अनुदिश तीन घटकों में वियोजित किया जा सकता है। यदि **A** व x-, y-, व z- अक्षों के मध्य कोण क्रमश: α, β तथा γ हो* [चित्र 3.9 (d)] तो

$$A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma \qquad 3.16(a)$$



चित्र 3.9(d) सदिश A का x, y एवं z - अक्षों के अनुदिश घटकों में वियोजन।

सामान्य रूप से,

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.16b)$$

सदिश **A** का परिमाण

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (3.16c)$$

होगा।

एक स्थिति सदिश **r** को निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}} + z\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.17)$$

यहां x, y तथा z सदिश **r** के अक्षों x-, y-, z- के अनुदिश घटक हैं।

3.6 सदिशों का योग : विश्लेषणात्मक विधि

यद्यपि सदिशों को जोड़ने की ग्राफी विधि हमें सदिशों तथा उनके परिणामी सदिश को स्पष्ट रूप से समझने में सहायक होती है, परन्तु कभी-कभी यह विधि जटिल होती है और इसकी शुद्धता भी सीमित होती है। भिन्न-भिन्न सदिशों को उनके संगत घटकों को मिलाकर जोड़ना अधिक आसान होता है। मान लीजिए कि किसी समतल में दो सदिश **A** तथा **B** हैं जिनके घटक क्रमश: A_x, A_y तथा B_x, B_y हैं तो

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.18)$$

मान लीजिए कि **R** इनका योग है, तो

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$$

$$= \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (3.19)$$

क्योंकि सदिश क्रमविनिमेय तथा साहचर्य नियमों का पालन करते हैं, इसलिए समीकरण (3.19) में व्यक्त किए गए सदिशों को निम्न प्रकार से पुन: व्यवस्थित कर सकते हैं :

$$\mathbf{R} = \left(A_x + B_x\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (3.19a)$$

क्योंकि $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$ (3.20)

इसलिए $R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y$ (3.21)

इस प्रकार परिणामी सदिश **R** का प्रत्येक घटक सदिशों **A** और **B** के संगत घटकों के योग के बराबर होता है।

तीन विमाओं के लिए सदिशों **A** और **B** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहाँ घटकों R_x, R_y तथा R_z के मान निम्न प्रकार से हैं:

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$
$$R_z = A_z + B_z \qquad (3.22)$$

इस विधि को अनेक सदिशों को जोड़ने व घटाने के लिए उपयोग में ला सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि **a, b** तथा **c** तीनों सदिश निम्न प्रकार से दिए गए हों :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$$

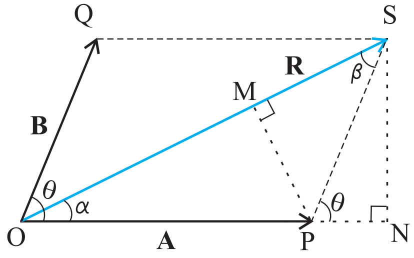
$$\mathbf{c} = c_x\hat{\mathbf{i}} + c_y\hat{\mathbf{j}} + c_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (3.23a)$$

तो सदिश **T** = **a** + **b** – **c** के घटक निम्नलिखित होंगे:

$$T_x = a_x + b_x - c_x$$
$$T_y = a_y + b_y - c_y$$
$$T_z = a_z + b_z - c_z \qquad (3.23b)$$

▶ ***उदाहरण 3.2*** चित्र 3.10 में दिखाए गए दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण θ है। इनके परिणामी सदिश का परिमाण तथा दिशा उनके परिमाणों तथा θ के पद में निकालिए।

* इस बात पर ध्यान दीजिए कि α, β, व γ कोण दिक्स्थान में हैं। ये ऐसी दो रेखाओं के बीच के कोण हैं जो एक समतल में नहीं हैं।



चित्र 3.10

हल चित्र 3.10 के अनुसार मान लीजिए कि **OP** तथा **OQ** दो सदिशों **A** तथा **B** को व्यक्त करते हैं, जिनके बीच का कोण θ है । तब सदिश योग के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा हमें परिणामी सदिश **R** प्राप्त होगा जिसे चित्र में **OS** द्वारा दिखाया गया है । इस प्रकार

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

चित्र में SN, OP के लंबवत् है तथा PM, OS के लंबवत् है ।

$$\therefore\ OS^2 = ON^2 + SN^2$$

किन्तु $ON = OP + PN = A + B\cos\theta$

$$SN = B\sin\theta$$

$$OS^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

अथवा $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (3.24a)$$

त्रिभुज OSN में, $SN = OS\sin\alpha = R\sin\alpha$

एवं त्रिभुज PSN में, $SN = PS\sin\theta = B\sin\theta$

अतएव $R\sin\alpha = B\sin\theta$

अथवा $$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (3.24b)$$

इसी प्रकार, $PM = A\sin\alpha = B\sin\beta$

अथवा $$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (3.24c)$$

समीकरणों (3.24b) तथा (3.24c) से हमें प्राप्त होता है–

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \qquad (3.24d)$$

समीकरण (3.24d) के द्वारा हम निम्नांकित सूत्र प्राप्त करते हैं–

$$\sin\alpha = \frac{B}{R}\sin\theta \qquad (3.24e)$$

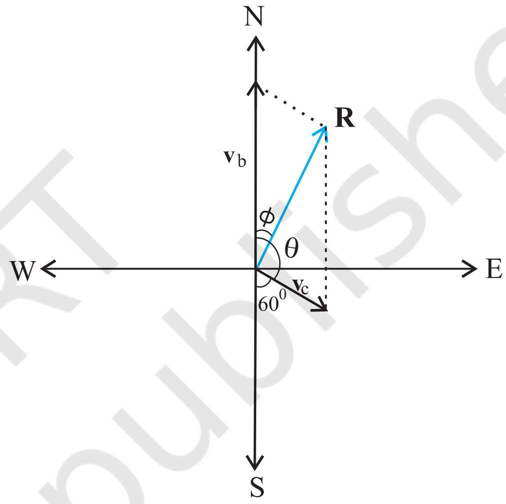
यहाँ R का मान समीकरण (3.24a) में दिया गया है ।

या, $$\tan\alpha = \frac{SN}{OP + PN} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta} \qquad (3.24f)$$

समीकरण (3.24a) से परिणामी **R** का परिमाण तथा समीकरण (3.24e) से इसकी दिशा मालूम की जा सकती है । समीकरण (3.24a) को **कोज्या-नियम** तथा समीकरण (3.24d) को **ज्या-नियम** कहते हैं । ◄

► ***उदाहरण 3.3*** एक मोटरबोट उत्तर दिशा की ओर 25 km/h के वेग से गतिमान है । इस क्षेत्र में जल-धारा का वेग 10 km/h है । जल-धारा की दिशा दक्षिण से पूर्व की ओर 60° पर है । मोटरबोट का परिणामी वेग निकालिए ।

हल चित्र 3.11 में सदिश v_b मोटरबोट के वेग को तथा v_c जल धारा के वेग को व्यक्त करते हैं । प्रश्न के अनुसार चित्र में इनकी दिशायें दर्शाई गई हैं । सदिश योग के समांतर चतुर्भुज नियम के अनुसार प्राप्त परिणामी **R** की दिशा चित्र में दर्शाई



चित्र 3.11

गई है । कोज्या-नियम का उपयोग करके हम **R** का परिमाण निकाल सकते हैं ।

$$R = \sqrt{v_b^2 + v_c^2 + 2v_b v_c \cos 120^\circ}$$

$$= \sqrt{25^2 + 10^2 + 2\times25\times10(-1/2)} \cong 22\ \text{km/h}$$

R की दिशा ज्ञात करने के लिए हम 'ज्या-नियम' का उपयोग करते हैं–

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{v_c}{\sin\phi} \quad \text{या, } \sin\phi = \frac{v_c}{R}\sin\theta$$

$$= \frac{10\times\sin120^\circ}{21.8} = \frac{10\sqrt{3}}{2\times21.8} \cong 0.397$$

$$\phi \cong 23.4^\circ$$ ◄

3.7 किसी समतल में गति

इस खण्ड में हम सदिशों का उपयोग कर दो या तीन विमाओं में गति का वर्णन करेंगे ।

3.7.1 स्थिति सदिश तथा विस्थापन

किसी समतल में स्थित कण P का x-y निर्देशतंत्र के मूल बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ [चित्र (3.12)] को निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त करते हैं :

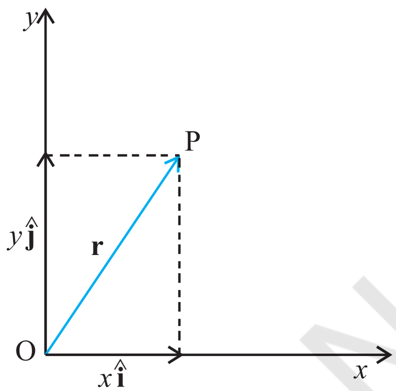
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

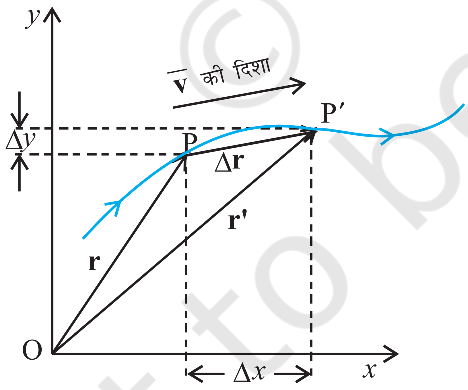
यहाँ x तथा y अक्षों x–तथा y– के अनुदिश $\mathbf{r}$ के घटक हैं । इन्हें हम कण के निर्देशांक भी कह सकते हैं ।

मान लीजिए कि चित्र (3.12b) के अनुसार कोई कण मोटी रेखा से व्यक्त वक्र के अनुदिश चलता है । किसी क्षण t पर इसकी स्थिति P है तथा दूसरे अन्य क्षण t' पर इसकी स्थिति P′ है । कण के विस्थापन को हम निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} \qquad (3.25)$$

इसकी दिशा P से P' की ओर है ।





चित्र 3.12 (a) स्थिति सदिश $\mathbf{r}$, *(b) विस्थापन* $\Delta\mathbf{r}$ *तथा कण का औसत वेग* $\bar{\mathbf{v}}$

समीकरण (3.25) को हम सदिशों के घटक के रूप में निम्नांकित प्रकार से व्यक्त करेंगे,

$$\Delta\mathbf{r} = \left(x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}\right) - \left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\Delta x + \hat{\mathbf{j}}\Delta y$$

यहाँ $\Delta x = x' - x$, $\Delta y = y' - y$ (3.26)

वेग

वस्तु के विस्थापन और संगत समय अंतराल के अनुपात को हम औसत वेग ($\bar{\mathbf{v}}$) कहते हैं, अत:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t} = \hat{\mathbf{i}}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad (3.27)$$

अथवा, $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \bar{v}_y\,\hat{\mathbf{j}}$

क्योंकि $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, इसलिए चित्र (3.12) के अनुसार औसत वेग की दिशा वही होगी, जो $\Delta\mathbf{r}$ की है ।

गतिमान वस्तु का **वेग** (तात्क्षणिक वेग) अति सूक्ष्म समयान्तराल ($\Delta t \to 0$ की सीमा में) विस्थापन $\Delta\mathbf{r}$ का समय अन्तराल Δt से अनुपात है । इसे हम $\mathbf{v}$ से व्यक्त करेंगे, अत:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (3.28)$$

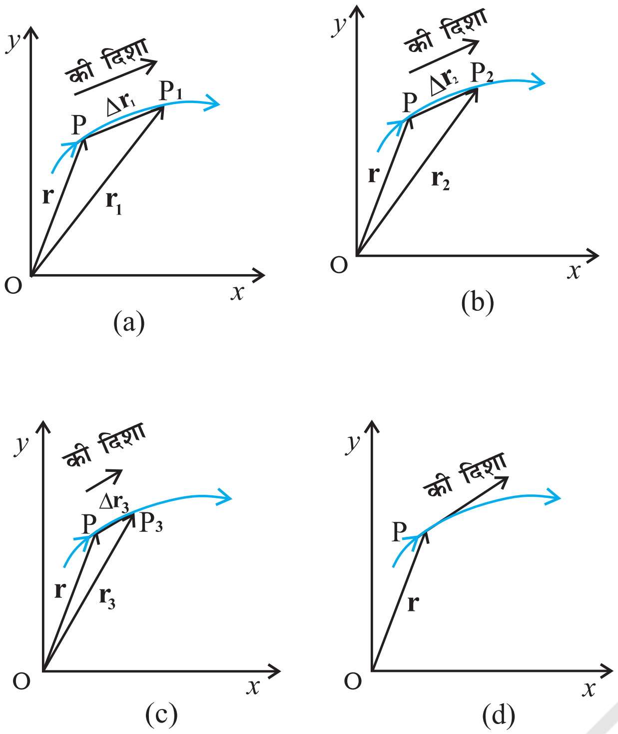
चित्रों 3.13(a) से लेकर 3.13(d) की सहायता से इस सीमान्त प्रक्रम को आसानी से समझा जा सकता है । इन चित्रों में मोटी रेखा उस पथ को दर्शाती है जिस पर कोई वस्तु क्षण t पर बिंदु P से चलना प्रारम्भ करती है । वस्तु की स्थिति $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$, समयों के उपरांत क्रमश: P_1, P_2, P_3, से व्यक्त होती है । इन समयों में कण का विस्थापन क्रमश: $\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \Delta\mathbf{r}_3$, है । चित्रों (a), (b) तथा (c) में क्रमश: घटते हुए Δt के मानों अर्थात् Δt_1, $\Delta t_2, \Delta t_3$, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए कण के औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ की दिशा को दिखाया गया है । जैसे ही $\Delta \boldsymbol{t} \to 0$ तो $\Delta r \to 0$ एवं $\Delta\mathbf{r}$ पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश हो जाता है (चित्र 3.13d)। इस प्रकार ***पथ के किसी बिंदु पर वेग उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा द्वारा व्यक्त होता है जिसकी दिशा वस्तु की गति के अनुदिश होती है।***

सुविधा के लिए $\mathbf{v}$ को हम प्राय: घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad (3.29)$$

$$= \hat{\mathbf{i}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$



चित्र 3.13 *जैसे ही समय अंतराल Δt शून्य की सीमा को स्पर्श कर लेता है, औसत वेग $\bar{\mathbf{v}}$ वस्तु के वेग $\mathbf{v}$ के बराबर हो जाता है । $\mathbf{v}$ की दिशा किसी क्षण पथ पर स्पर्श रेखा के समांतर है।*

या, $$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} = \upsilon_x\hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{j}}.$$

यहाँ $$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \upsilon_y = \frac{dy}{dt} \quad (3.30a)$$

अत: यदि समय के फलन के रूप में हमें निर्देशांक x और y ज्ञात हैं तो हम उपरोक्त समीकरणों का उपयोग υ_x और υ_y निकालने में कर सकते हैं ।

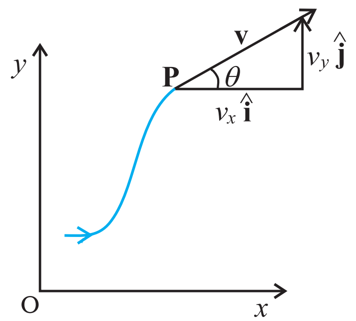
सदिश $\mathbf{v}$ का परिमाण निम्नलिखित होगा,

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \quad (3.30b)$$

तथा इसकी दिशा कोण θ द्वारा निम्न प्रकार से व्यक्त होगी :

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right) \quad (3.30c)$$

चित्र 3.14 में बिन्दु P पर किसी वेग सदिश $\mathbf{v}$ के लिए υ_x, υ_y तथा कोण θ को दर्शाया गया है ।



चित्र 3.14 *वेग $\mathbf{v}$ के घटक υ_x, υ_y तथा कोण θ जो x-अक्ष से बनाता है । चित्र में $\upsilon_x = \upsilon \cos\theta$, $\upsilon_y = \upsilon \sin\theta$*

त्वरण

x-y समतल में गतिमान वस्तु का **औसत त्वरण (a)** उसके वेग में परिवर्तन तथा संगत समय अंतराल Δt के अनुपात के बराबर होता है :

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\upsilon_x\hat{\mathbf{i}} + \upsilon_y\hat{\mathbf{j}})}{\Delta t} = \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}\hat{\mathbf{j}} \quad (3.31a)$$

अथवा $$\bar{\mathbf{a}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}. \quad (3.31b)$$

त्वरण (*तात्क्षणिक त्वरण*) औसत त्वरण के सीमान्त मान के बराबर होता है जब समय अंतराल शून्य हो जाता है :

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \quad (3.32a)$$

क्योंकि $\Delta\mathbf{v} = \hat{\mathbf{i}}\Delta\upsilon_x + \hat{\mathbf{j}}\Delta\upsilon_y$, इसलिए

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} + \hat{\mathbf{j}} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}$$

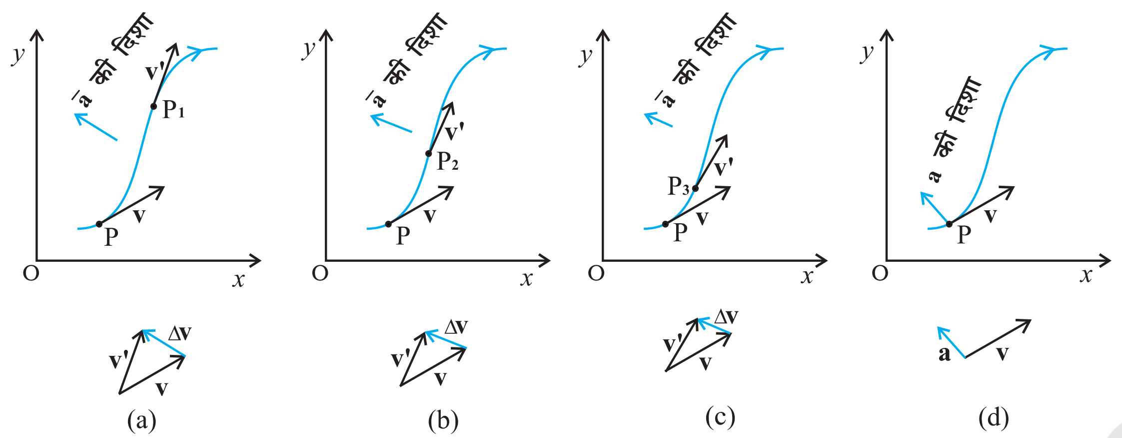
अथवा $$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y \quad (3.32b)$$

जहाँ $$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \; a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} \quad (3.32c)*$$

वेग की भाँति यहाँ भी वस्तु के पथ को प्रदर्शित करने वाले किसी आलेख में त्वरण की परिभाषा के लिए हम ग्राफी विधि से सीमान्त प्रक्रम को समझ सकते हैं । इसे चित्रों (3.15a) से (3.15d) तक में समझाया गया है । किसी क्षण t पर कण की स्थिति बिंदु P द्वारा दर्शाई गई है । Δt_1, Δt_2, Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) समय के बाद कण की स्थिति क्रमश: बिंदुओं P_1, P_2, P_3 द्वारा व्यक्त की

* x व y के पदों में a_x तथा a_y को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

$$a_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$



चित्र 3.15 तीन समय अंतरालों (a) Δt_1, (b) Δt_2, (c) Δt_3, ($\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3$) के लिए औसत त्वरण $\bar{\mathbf{a}}$ (d) $\Delta t \to 0$ सीमा के अंतर्गत औसत त्वरण वस्तु के त्वरण के बराबर होता है ।

गई है । चित्रों (3.15) a, b और c में इन सभी बिंदुओं P, P_1, P_2, P_3 पर वेग सदिशों को भी दिखाया गया है । प्रत्येक Δt के लिए सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta \mathbf{v}$ का मान निकालते हैं । परिभाषा के अनुसार औसत त्वरण की दिशा वही है जो $\Delta \mathbf{v}$ की होती है । हम देखते हैं कि जैसे-जैसे Δt का मान घटता जाता है वैसे-वैसे $\Delta \mathbf{v}$ की दिशा भी बदलती जाती है और इसके परिणामस्वरूप त्वरण की भी दिशा बदलती है । अंततः $\Delta t \to 0$ सीमा में [चित्र 3.15 (d)] औसत त्वरण, तात्क्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है और इसकी दिशा चित्र में दर्शाए अनुसार होती है ।

ध्यान दें कि एक विमा में वस्तु का वेग एवं त्वरण सदैव एक सरल रेखा में होते हैं (वे या तो एक ही दिशा में होते हैं अथवा विपरीत दिशा में) । परंतु दो या तीन विमाओं में गति के लिए वेग एवं त्वरण सदिशों के बीच 0° से 180° के बीच कोई भी कोण हो सकता है।

▶ **उदाहरण 3.4** किसी कण की स्थिति
$\mathbf{r} = 3.0\, t\hat{\mathbf{i}} + 2.0\, t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\,\hat{\mathbf{k}}$ है ।
जहां t सेकंड में व्यक्त किया गया है । अन्य गुणकों के मात्रक इस प्रकार हैं कि $\mathbf{r}$ मीटर में व्यक्त हो जाएँ। (a) कण का $\mathbf{v}(t)$ व $\mathbf{a}(t)$ ज्ञात कीजिए; (b) $t = 1.0$ s पर $\mathbf{v}(t)$ का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए ।

हल

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0\, t\hat{\mathbf{i}} + 2.0\, t^2\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}})$$

$$= 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 4.0\, t\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 4.0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$a = 4.0 \text{ m s}^{-2}$ y- दिशा में

$t = 1.0$ s पर $\mathbf{v} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$

इसका परिमाण $v = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.0 \text{ m s}^{-1}$ है, तथा

इसकी दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) \cong 53^\circ$ ◀

3.8 किसी समतल में एकसमान त्वरण से गति

मान लीजिए कि कोई वस्तु एक समतल x-y में एक समान त्वरण $\mathbf{a}$ से गति कर रही है अर्थात् $\mathbf{a}$ का मान नियत है । किसी समय अंतराल में औसत त्वरण इस स्थिर त्वरण के मान $\bar{\mathbf{a}}$ के बराबर होगा $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ । अब मान लीजिए किसी क्षण $t = 0$ पर वस्तु का वेग $\mathbf{v}_0$ तथा दूसरे अन्य क्षण t पर उसका वेग $\mathbf{v}$ है ।

तब परिभाषा के अनुसार

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t - 0} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v_0}}{t}$$

अथवा $\quad \mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}\, t \quad$ (3.33a)

उपर्युक्त समीकरण को सदिशों के घटक के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं–

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t \quad (3.33b)$$

अब हम देखेंगे कि समय के साथ स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ किस प्रकार बदलता है । यहाँ एकविमीय गति के लिए बताई गई विधि का उपयोग करेंगे । मान लीजिए कि $t = 0$ तथा $t = t$ क्षणों पर कण के स्थिति के सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_0$ तथा $\mathbf{r}$ हैं तथा इन क्षणों पर कण के वेग $\mathbf{v}_0$ तथा $\mathbf{v}$ हैं । तब समय अंतराल $t - 0 = t$ में कण का औसत वेग $(\mathbf{v_o} + \mathbf{v})/2$ तथा विस्थापन $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ होगा । क्योंकि विस्थापन औसत तथा समय अंतराल का गुणनफल होता है,

अर्थात्

$$\mathbf{r}-\mathbf{r_0}=\left(\frac{\mathbf{v}+\mathbf{v_0}}{2}\right)t=\left(\frac{(\mathbf{v_0}+\mathbf{a}t)+\mathbf{v_0}}{2}\right)t$$

$$=\mathbf{v_0}+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

अतएव,

$$\mathbf{r}=\mathbf{r_0}+\mathbf{v_0}t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \qquad (3.34a)$$

यह बात आसानी से सत्यापित की जा सकती है कि समीकरण (3.34a)का अवकलन $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ समीकरण (3.33a) है तथा साथ ही $t=0$ क्षण पर $\mathbf{r}=\mathbf{r_0}$ की शर्त को भी पूरी करता है। समीकरण (3.34a) को घटकों के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$x=x_0+v_{ox}t+\frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y=y_0+v_{oy}t+\frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (3.34b)$$

समीकरण (3.34b) की सीधी व्याख्या यह है कि x व y दिशाओं में गतियाँ एक दूसरे पर निर्भर नहीं करती हैं। अर्थात्, ***किसी समतल (दो विमा) में गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय एकसमान त्वरित गतियों के रूप में समझ सकते हैं जो परस्पर लंबवत् दिशाओं के अनुदिश हों।*** यह महत्वपूर्ण परिणाम है जो दो विमाओं में वस्तु की गति के विश्लेषण में उपयोगी होता है। यहाँ परिणाम त्रिविमीय गति के लिए भी है। बहुत-सी भौतिक स्थितियों में दो लंबवत् दिशाओं का चुनाव सुविधाजनक होता है जैसा कि हम प्रक्षेप्य गति के लिए खण्ड (3.10) में देखेंगे।

▶ ***उदाहरण 3.5*** $t=0$ क्षण पर कोई कण मूल बिंदु से $5.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s के वेग से चलना शुरू करता है। x-y समतल में उस पर एक ऐसा बल लगता है जो उसमें एकसमान त्वरण $(3.0\hat{\mathbf{i}}+2.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s² उत्पन्न करता है। (a) जिस क्षण पर कण का x निर्देशांक 84 m हो उस क्षण उसका y निर्देशांक कितना होगा ? (b) इस क्षण कण की चाल क्या होगी?

हल समीकरण (3.34a) से $\mathbf{r}_0=0$ पर प्रश्नानुसार कण की स्थिति निम्नांकित समीकरण से व्यक्त होगी,

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}_0 t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

$$=5.0\hat{\mathbf{i}}\,t+\frac{1}{2}(3.0\hat{\mathbf{i}}+2.0\hat{\mathbf{j}})t^2$$

$$=(5.0t+1.5t^2)\hat{\mathbf{i}}+1.0t^2\hat{\mathbf{j}}$$

अतएव, $x(t)=5.0\,t+1.5\,t^2$

$y(t)=1.0\,t^2$

जब $x(t)=84$ m तब $t=?$

$$\therefore\ 84=5.0\,t+1.5\,t^2$$

हल करने पर

$t=6.0$ s पर $y=1.0(6)^2=36.0$ m

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(5.0+3.0t)\hat{\mathbf{i}}+2.0t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$t=6$ s के लिए, $\mathbf{v}=23.0\hat{\mathbf{i}}+12.0\hat{\mathbf{j}}$

अतः कण की चाल, $|\mathbf{v}|=\sqrt{23^2+12^2}\cong 26\ \text{m s}^{-1}$ ◀

3.9 प्रक्षेप्य गति

इससे पहले खण्ड में हमने जो विचार विकसित किए हैं, उदाहरणस्वरूप उनका उपयोग हम प्रक्षेप्य की गति के अध्ययन के लिए करेंगे। जब कोई वस्तु उछालने के बाद उड़ान में हो या प्रक्षेपित की गई हो तो उसे **प्रक्षेप्य** कहते हैं। ऐसा प्रक्षेप्य फुटबॉल, क्रिकेट की बॉल, बेस-बॉल या अन्य कोई भी वस्तु हो सकती है। किसी प्रक्षेप्य की गति को दो अलग-अलग समकालिक गतियों के घटक के परिणाम के रूप में लिया जा सकता है। इनमें से एक घटक बिना किसी त्वरण के क्षैतिज दिशा में होता है तथा दूसरा गुरुत्वीय बल के कारण एकसमान त्वरण से ऊर्ध्वाधर दिशा में होता है।

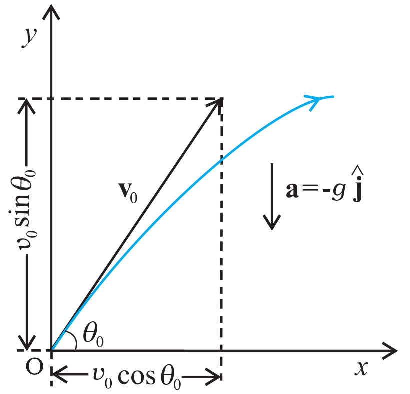
सर्वप्रथम गैलीलियो ने अपने लेख **डायलॉग आन दि ग्रेट वर्ल्ड सिस्टम्स** (1632) में प्रक्षेप्य गति के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर घटकों की स्वतंत्र प्रकृति का उल्लेख किया था।

इस अध्ययन में हम यह मानेंगे कि प्रक्षेप्य की गति पर वायु का प्रतिरोध नगण्य प्रभाव डालता है। माना कि प्रक्षेप्य को ऐसी दिशा की ओर $\mathbf{v}_0$ वेग से फेंका गया है जो x- अक्ष से (चित्र 3.16 के अनुसार) θ_0 कोण बनाता है।

फेंकी गई वस्तु को प्रक्षेपित करने के बाद उस पर गुरुत्व के कारण लगने वाले त्वरण की दिशा नीचे की ओर होती है :

$$\mathbf{a}=-g\hat{\mathbf{j}}$$

अर्थात् $a_x=0$, तथा $a_y=-g \qquad (3.35)$



चित्र 3.16 v_0 वेग से θ_0 कोण पर प्रक्षेपित किसी वस्तु की गति ।

प्रारंम्भिक वेग $\mathbf{v}_0$ के घटक निम्न प्रकार होंगे :

$$v_{ox} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{oy} = v_0 \sin \theta_0 \quad (3.36)$$

यदि चित्र 3.16 के अनुसार वस्तु की प्रारंभिक स्थिति निर्देश तंत्र के मूल बिंदु पर हो, तो

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

इस प्रकार समीकरण (3.34b) को निम्न प्रकार से लिखेंगे :

$$x = v_{ox}\, t = (v_0 \cos \theta_0) t$$

तथा, $$y = (v_0 \sin \theta_0)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \quad (3.37)$$

समीकरण (3.33b) का उपयोग करके किसी समय t के लिए वेग के घटकों को नीचे लिखे गए समीकरणों से व्यक्त करेंगे :

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g\, t \quad (3.38)$$

समीकरण (3.37) से हमें किसी क्षण t पर प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ तथा प्रक्षेप्य कोण θ_0 के पदों में प्रक्षेप्य के निर्देशांक x- और y- प्राप्त हो जाएँगे । इस बात पर ध्यान दीजिए कि x व y दिशाओं के परस्पर लंबवत् होने के चुनाव से प्रक्षेप्य गति के विश्लेषण में पर्याप्त सरलता हो गई है । वेग के दो घटकों में से एक x- घटक गति की पूरी अवधि में स्थिर रहता है जबकि दूसरा y- घटक इस प्रकार परिवर्तित होता है मानो प्रक्षेप्य स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिर रहा हो । चित्र 3.17 में विभिन्न क्षणों के लिए इसे आलेखी विधि से दर्शाया गया है । ध्यान दीजिए कि अधिकतम ऊँचाई वाले बिंदु के लिए $v_y = 0$ तथा

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = 0$$

प्रक्षेपक के पथ का समीकरण

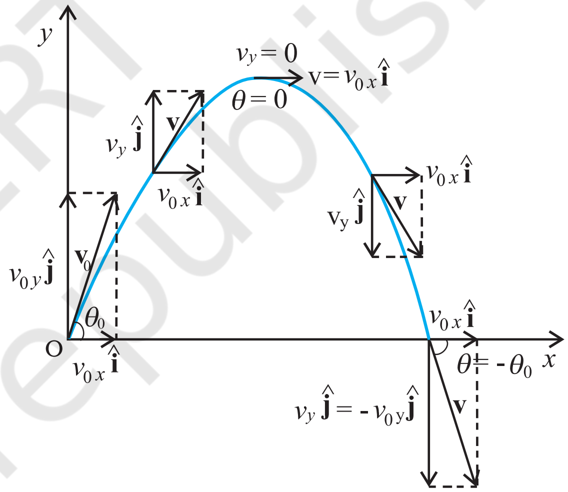
प्रक्षेप्य द्वारा चले गए पथ की आकृति क्या होती है ? इसके लिए हमें पथ का समीकरण निकालना होगा । समीकरण (3.37) में दिए गए x व y व्यंजकों से t को विलुप्त करने से निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$y = (\tan \theta_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} x^2 \quad (3.39)$$

यह प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण है और इसे चित्र 3.17 में दिखाया गया है । क्योंकि g, θ_0 तथा v_0 अचर हैं, समीकरण (3.39) को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$y = ax + bx^2$$

इसमें a तथा b नियतांक हैं । यह एक परवलय का समीकरण है, अर्थात् प्रक्षेप्य का पथ परवलयिक होता है ।



चित्र 3.17 प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है ।

अधिकतम ऊँचाई का समय

प्रक्षेप्य अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने के लिए कितना समय लेता है? मान लीजिए कि यह समय t_m है । क्योंकि इस बिंदु पर $v_y = 0$ इसलिए समीकरण (3.38) से हम t_m का मान निकाल सकते हैं :

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t_m = 0$$

अथवा $$t_m = v_o \sin\theta_o / g \quad (3.40a)$$

प्रक्षेप्य की उड़ान की अवधि में लगा कुल समय T_f हम समीकरण (3.38) में $y = 0$ रखकर निकाल लेते हैं । इसलिए,

$$T_f = 2\,(v_o \sin \theta_o)/g \quad (3.40b)$$

T_f को प्रक्षेप्य का **उड्डयन काल** कहते हैं । यह ध्यान देने की बात है कि $T_f = 2t_m$ । पथ की सममिति से हम ऐसे ही परिणाम की आशा करते हैं ।

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई

समीकरण (3.37) में $t = t_m$ रखकर प्रक्षेप्य द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई h_m की गणना की जा सकती है ।

$$y = h_m = \left(v_0 \sin\theta_0\right)\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

या $$h_m = \frac{\left(v_0 \sin\theta_0\right)^2}{2g} \qquad (3.41)$$

प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास

प्रारंभिक स्थिति ($x = y = 0$) से चलकर उस स्थिति तक जब $y = 0$ हो प्रक्षेप्य द्वारा चली गई दूरी को **क्षैतिज परास**, R, कहते हैं। क्षैतिज परास उड्डयन काल T_f में चली गई दूरी है । इसलिए, परास R होगा :

$$R = (v_0 \cos\theta_0)(T_f)$$
$$= (v_o \cos\theta_o)\ (2\, v_o \sin\theta_o)/g$$

अथवा $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (3.42)$$

समीकरण (3.42) से स्पष्ट है कि किसी प्रक्षेप्य के वेग v_0 लिए R अधिकतम तब होगा जब $\theta_0 = 45^0$ क्योंकि $\sin 90^0 = 1$ (जो $\sin 2\theta_0$ का अधिकतम मान है) । इस प्रकार अधिकतम क्षैतिज परास होगा

$$R_m = \frac{v_0^2}{g} \qquad (3.42a)$$

उदाहरण 3.6 : गैलीलियो ने अपनी पुस्तक "टू न्यू साइंसेज़" में कहा है कि "उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45° से बराबर मात्रा द्वारा अधिक या कम हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं" । इस कथन को सिद्ध कीजिए ।

हल यदि कोई प्रक्षेप्य θ_0 कोण पर प्रांरभिक वेग v_0 से फेंका जाए, तो उसका परास

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \text{ होगा।}$$

अब कोणों ($45^0 + \alpha$) तथा ($45^0 - \alpha$) के लिए $2\theta_0$ का मान क्रमश: ($90^0 + 2\alpha$) तथा ($90^0 - 2\alpha$) होगा । $\sin(90^0 + 2\alpha)$ तथा $\sin(90^0 - 2\alpha)$ दोनों का मान समान अर्थात् $\cos 2\alpha$ होता है । अत: उन उन्नयनों के लिए जिनके मान 45^0 से बराबर मात्रा द्वारा कम या अधिक हैं, क्षैतिज परास बराबर होते हैं । ◀

उदाहरण 3.7 : एक पैदल यात्री किसी खड़ी चट्टान के कोने पर खड़ा है । चट्टान जमीन से 490 m ऊंची है । वह एक पत्थर को क्षैतिज दिशा में 15 m s^{-1} की आरंभिक चाल से फेंकता है । वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानते हुए यह ज्ञात कीजिए कि पत्थर को जमीन तक पहुँचने में कितना समय लगा तथा जमीन से टकराते समय उसकी चाल कितनी थी? ($g = 9.8$ m s^{-2})।

हल हम खड़ी चट्टान के कोने को x- तथा y- अक्ष का मूल बिंदु तथा पत्थर फेंके जाने के समय को $t = 0$ मानेंगे । x- अक्ष की धनात्मक दिशा आरंभिक वेग के अनुदिश तथा y-अक्ष की धनात्मक दिशा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर चुनते हैं । जैसा कि हम पहले कह चुके हैं कि गति के x- व y- घटक एक दूसरे पर निर्भर नहीं करते, इसलिए

$$x(t) = x_0 + v_{ox}\, t$$
$$y(t) = y_0 + v_{oy}\, t + (1/2)\, a_y\, t^2$$

यहाँ $x_o = y_o = 0$, $v_{oy} = 0$, $a_y = -g = -9.8$ m s^{-2}

$v_{ox} = 15$ m s^{-1}.

पत्थर उस समय जमीन से टकराता है जब $y(t) = -490$ m

$\therefore\ -490 \text{ m} = -(1/2)\,(9.8)\,t^2$

अर्थात् $t = 10$ s

वेग घटक $v_x = v_{ox}$ तथा $v_y = v_{oy} - g\,t$ होंगे ।

अत:, जब पत्थर जमीन से टकराता है, तब

$v_{ox} = 15$ m s^{-1}

$v_{oy} = 0 - 9.8 \times 10 = -98$ m s^{-1}

इसलिए पत्थर की चाल

$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 98^2} = 99$ m s^{-1} होगी । ◀

उदाहरण 3.8 : क्षैतिज से ऊपर की ओर 30° का कोण बनाते हुए एक क्रिकेट गेंद 28 m s^{-1} की चाल से फेंकी जाती है । (a) अधिकतम ऊँचाई की गणना कीजिए, (b) उसी स्तर पर वापस पहुँचने में लगे समय की गणना कीजिए, तथा (c) फेंकने वाले बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहाँ गेंद उसी स्तर पर पहुँची है, की गणना कीजिए ।

हल (a) अधिकतम ऊँचाई

$$h_m = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2\,g} = \frac{(28 \sin 30^0)^2}{2(9.8)} \text{ m}$$

$= 10.0$ m होगी ।

(b) उसी धरातल पर वापस आने में लगा समय

$T_f = (2\, v_o \sin\theta_o)/g = (2 \times 28 \times \sin 30°)/9.8$
$= 28/9.8$ s $= 2.9$ s होगा ।

(c) फेंकने वाले बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहाँ गेंद उसी स्तर पर पहुँचती है:

$$R = \frac{\left(v_o^2 \sin 2\theta_o\right)}{g} = \frac{28 \times 28 \times \sin 60^o}{9.8} = 69 \text{ m} \text{ होगी।}$$

3.10 एकसमान वृत्तीय गति

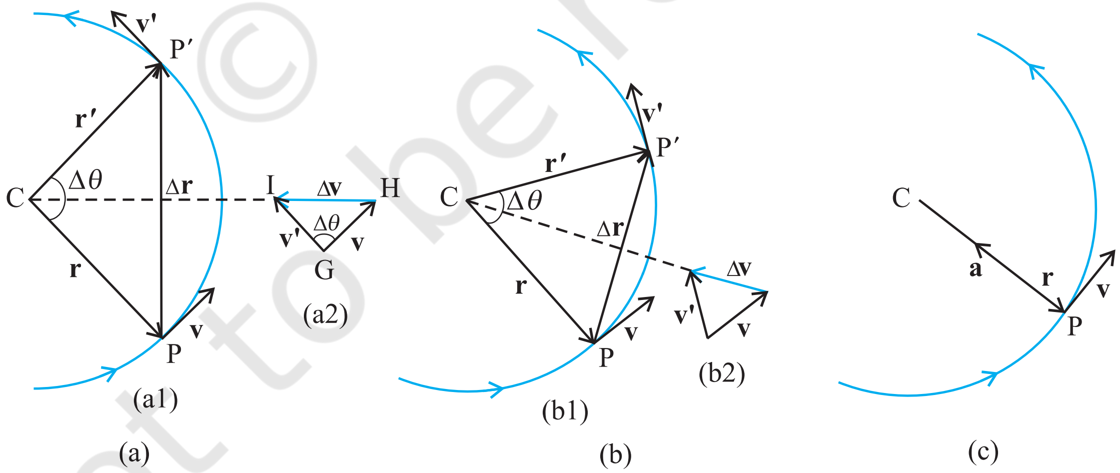
जब कोई वस्तु एकसमान चाल से एक वृत्ताकार पथ पर चलती है, तो वस्तु की गति को **एकसमान वृत्तीय गति** कहते हैं। शब्द "एकसमान" उस चाल के संदर्भ में प्रयुक्त हुआ है जो वस्तु की गति की अवधि में एकसमान (नियत) रहती है। माना कि चित्र 3.18 के अनुसार कोई वस्तु एकसमान चाल v से R त्रिज्या वाले वृत्त के अनुदिश गतिमान है। क्योंकि वस्तु के वेग की दिशा में निरन्तर परिवर्तन हो रहा है, अत: उसमें त्वरण उत्पन्न हो रहा है। हमें त्वरण का परिमाण तथा उसकी दिशा ज्ञात करनी है।

माना $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r'}$ तथा $\mathbf{v}$ व $\mathbf{v'}$ कण की स्थिति तथा गति सदिश हैं जब वह गति के दौरान क्रमश: बिंदुओं P व P' पर है (चित्र 3.18a)। परिभाषा के अनुसार, किसी बिंदु पर कण का वेग उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश गति की दिशा में होता है। चित्र 3.18(a1) में वेग सदिशों $\mathbf{v}$ व $\mathbf{v'}$ को दिखाया गया है। चित्र 3.18(a2) में सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करके $\Delta\mathbf{v}$ निकाल लेते हैं। क्योंकि पथ वृत्तीय है, इसलिए चित्र में, ज्यामिति से स्पष्ट है कि $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ के तथा $\mathbf{v'}$, $\mathbf{r'}$ के लंबवत् हैं। इसलिए, $\Delta\mathbf{v}$, $\Delta\mathbf{r}$ के लंबवत् होगा। पुन: क्योंकि औसत त्वरण $\Delta\mathbf{v}\left(\bar{\mathbf{a}} = \dfrac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right)$ के अनुदिश है, इसलिए $\bar{\mathbf{a}}$ भी $\Delta\mathbf{r}$ के लंबवत् होगा। अब यदि हम $\Delta\mathbf{v}$ को उस रेखा पर रखें जो $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r'}$ के बीच के कोण को द्विभाजित करती है तो हम देखेंगे कि इसकी दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होगी। इन्ही राशियों को चित्र 3.18(b) में छोटे समय अंतराल के लिए दिखाया गया है। $\Delta\mathbf{v}$, अत: $\bar{\mathbf{a}}$ की दिशा पुन: केंद्र की ओर होगी। चित्र (3.18c) में $\Delta t \to 0$ है, इसलिए औसत त्वरण, तात्क्षणिक त्वरण के बराबर हो जाता है। इसकी दिशा केंद्र की ओर होती है*। इस प्रकार, यह निष्कर्ष निकलता है कि एकसमान वृत्तीय गति के लिए वस्तु के त्वरण की दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होती है। अब हम इस त्वरण का परिमाण निकालेंगे।

परिभाषा के अनुसार, $\mathbf{a}$ का परिमाण निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त होता है,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

मान लीजिए $\mathbf{r}$ व $\mathbf{r'}$ के बीच का कोण $\Delta\theta$ है। क्योंकि वेग सदिश $\mathbf{v}$ व $\mathbf{v'}$ सदैव स्थिति सदिशों के लंबवत् होते हैं, इसलिए उनके बीच का कोण भी $\Delta\theta$ होगा। अतएव स्थिति सदिशों द्वारा निर्मित त्रिभुज (ΔCPP′) तथा वेग सदिशों $\mathbf{v}$, $\mathbf{v'}$ व $\Delta\mathbf{v}$ द्वारा निर्मित त्रिभुज (ΔGHI) समरूप हैं (चित्र 3.18a)। इस प्रकार एक त्रिभुज के आधार की लंबाई व किनारे की भुजा की लंबाई का अनुपात दूसरे त्रिभुज की तदनुरूप लंबाइयों के अनुपात के बराबर होगा, अर्थात्



चित्र 3.18 किसी वस्तु की एकसमान वृत्तीय गति के लिए वेग तथा त्वरण। चित्र (a) से (c) तक Δt घटता जाता है (चित्र c में शून्य हो जाता है)। वृत्ताकार पथ के प्रत्येक बिंदु पर त्वरण वृत्त के केंद्र की ओर होता है।

$\Delta t \to 0$ सीमा में $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ के लंबवत् हो जाता है। इस सीमा में क्योंकि $\Delta\mathbf{v} \to 0$ होता है, फलस्वरूप यह भी $\mathbf{v}$ के लंबवत् होगा। अत: वृत्तीय पथ के प्रत्येक बिंदु पर त्वरण की दिशा केंद्र की ओर होती है।

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R} \qquad \text{या} \qquad |\Delta \mathbf{v}| = v\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{R}$$

इसलिए,

$$|\mathbf{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v|\Delta \mathbf{r}|}{R\Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

यदि Δt छोटा है, तो $\Delta\theta$ भी छोटा होगा । ऐसी स्थिति में चाप PP′ को लगभग $|\Delta \mathbf{r}|$ के बराबर ले सकते हैं ।

अर्थात्, $|\Delta \mathbf{r}| \cong v\,\Delta t$

$$\text{या} \quad \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \cong v \quad \text{अथवा} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = v$$

इस प्रकार, अभिकेंद्र त्वरण a_c का मान निम्नलिखित होगा,

$$a_c = \left(\frac{v}{R}\right) v = v^2/R \qquad (3.43)$$

इस प्रकार किसी R त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ के अनुदिश v चाल से गतिमान वस्तु के त्वरण का परिमाण v^2/R होता है जिसकी **दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होती है** । इसी कारण इस प्रकार के त्वरण को **अभिकेंद्र त्वरण** कहते हैं (यह पद न्यूटन ने सुझाया था) । अभिकेंद्र त्वरण से संबंधित संपूर्ण विश्लेषणात्मक लेख सर्वप्रथम 1673 में एक डच वैज्ञानिक क्रिस्चियान हाइगेन्स (1629-1695) ने प्रकाशित करवाया था, किन्तु संभवतया न्यूटन को भी कुछ वर्षों पूर्व ही इसका ज्ञान हो चुका था। अभिकेंद्र को अंग्रेजी में सेंट्रीपीटल कहते हैं जो एक ग्रीक शब्द है जिसका अभिप्राय केंद्र-अभिमुख (केंद्र की ओर) है । क्योंकि v तथा R दोनों अचर हैं इसलिए अभिकेंद्र त्वरण का परिमाण भी अचर होता है। परंतु दिशा बदलती रहती है और सदैव केंद्र की ओर होती है। इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि अभिकेंद्र त्वरण एकसमान सदिश नहीं होता है ।

किसी वस्तु के एकसमान वृत्तीय गति के वेग तथा त्वरण को हम एक दूसरे प्रकार से भी समझ सकते हैं । चित्र 3.18 में दिखाए गए अनुसार $\Delta t\ (=t'-t)$ समय अंतराल में जब कण P से P′ पर पहुँच जाता है तो रेखा CP कोण $\Delta\theta$ से घूम जाती है । $\Delta\theta$ को हम कोणीय दूरी कहते हैं । कोणीय वेग ω (ग्रीक अक्षर 'ओमेगा') को हम कोणीय दूरी के समय परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित करते हैं । इस प्रकार,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (3.44)$$

अब यदि Δt समय में कण द्वारा चली दूरी को Δs से व्यक्त करें (अर्थात् PP′$=\Delta s$) तो,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

किंतु $\Delta s = R\Delta\theta$, इसलिए $v = R\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\,\omega$

अत: $v = \omega R$ (3.45)

अभिकेंद्र त्वरण को हम कोणीय चाल के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं । अर्थात्,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

या $a_c = \omega^2 R$ (3.46)

वृत्त का एक चक्कर लगाने में वस्तु को जो समय लगता है उसे हम आवर्तकाल T कहते हैं । एक सेकंड में वस्तु जितने चक्कर लगाती है, उसे हम वस्तु की आवृत्ति ν कहते हैं । परंतु इतने समय में वस्तु द्वारा चली गई दूरी $s = 2\pi R$ होती है, इसलिए

$$v = 2\pi R/T = 2\pi R\nu \qquad (3.47)$$

इस प्रकार ω, v तथा a_c को हम आवृति ν के पद में व्यक्त कर सकते हैं, अर्थात्

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$v = 2\pi\nu R$$

$$a_c = 4\pi^2\nu^2 R \qquad (3.48)$$

▶ **उदाहरण 3.9 :** कोई कीड़ा एक वृत्तीय खाँचे में जिसकी त्रिज्या 12cm है, फँस गया है । वह खाँचे के अनुदिश स्थिर चाल से चलता है और 100 सेकंड में 7 चक्कर लगा लेता है। (a) कीड़े की कोणीय चाल व रैखिक चाल कितनी होगी? (b) क्या त्वरण सदिश एक अचर सदिश है। इसका परिणाम कितना होगा?

हल यह एकसमान वृत्तीय गति का एक उदाहरण है । यहाँ R = 12 cm है । कोणीय चाल ω का मान

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi \times 7/100 = 0.44 \text{ rad/s}$$

है तथा रैखिक चाल v का मान

$$v = \omega\ R = 0.44 \times 12 \text{ cm} = 5.3 \text{ cm s}^{-1}$$

होगा । वृत्त के हर बिंदु पर वेग v की दिशा उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के अनुदिश होगी तथा त्वरण की दिशा वृत्त के केंद्र की ओर होगी । क्योंकि यह दिशा लगातार बदलती रहती है, इसलिए त्वरण एक अचर सदिश नहीं है । परंतु त्वरण का परिमाण अचर है, जिसका मान

$a = \omega^2 R = (0.44 \text{ s}^{-1})^2 (12 \text{ cm}) = 2.3 \text{ cm s}^{-2}$ होगा। ◀

सारांश

1. *अदिश राशियाँ* वे राशियाँ हैं जिनमें केवल परिमाण होता है । दूरी, चाल, संहति (द्रव्यमान) तथा ताप अदिश राशियों के कुछ उदाहरण हैं ।
2. *सदिश राशियाँ* वे राशियाँ हैं जिनमें परिमाण तथा दिशा दोनों होते हैं । विस्थापन, वेग तथा त्वरण आदि इस प्रकार की राशि के कुछ उदाहरण हैं । ये राशियाँ सदिश बीजगणित के विशिष्ट नियमों का पालन करती हैं ।
3. यदि किसी सदिश **A** को किसी वास्तविक संख्या λ से गुणा करें तो हमें एक दूसरा सदिश **B** प्राप्त होता है जिसका परिमाण **A** के परिमाण का λ गुना होता है । नए सदिश की दिशा या तो **A** के अनुदिश होती है या इसके विपरीत । दिशा इस बात पर निर्भर करती है कि λ धनात्मक है या ऋणात्मक ।
4. दो सदिशों **A** व **B** को जोड़ने के लिए या तो *शीर्ष व पुच्छ* की ग्राफी विधि का या *समान्तर चतुर्भुज विधि* का उपयोग करते हैं ।
5. सदिश योग *क्रम-विनिमेय* नियम का पालन करता है–
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$
साथ ही यह *साहचर्य के नियम* का भी पालन करता है अर्थात् $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
6. *शून्य सदिश* एक ऐसा सदिश होता है जिसका परिमाण शून्य होता है। क्योंकि परिमाण शून्य होता है इसलिए इसके साथ दिशा बतलाना आवश्यक नहीं है ।
इसके निम्नलिखित गुण होते हैं :
$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}$$
7. सदिश **B** को **A** से घटाने की क्रिया को हम **A** व **–B** को जोड़ने के रूप में परिभाषित करते हैं–
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$
8. किसी सदिश **A** को उसी समतल में स्थित दो सदिशों **a** तथा **b** के अनुदिश दो घटक सदिशों में वियोजित कर सकते हैं:
$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$
यहाँ λ व μ वास्तविक संख्याएँ हैं ।
9. किसी सदिश **A** से संबंधित *एकांक सदिश* वह सदिश है जिसका परिमाण एक होता है और जिसकी दिशा सदिश **A** के अनुदिश होती है । एकांक सदिश $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$
एकांक सदिश $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ इकाई परिमाण वाले वे सदिश हैं जिनकी दिशाएँ दक्षिणावर्ती निकाय की अक्षों क्रमशः x-, y- व z- के अनुदिश होती हैं ।
10. दो विमा के लिए सदिश **A** को हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं–
$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\,\hat{\mathbf{j}}$$
यहाँ A_x तथा A_y क्रमशः x-, y-अक्षों के अनुदिश **A** के घटक हैं । यदि सदिश **A**, x-अक्ष के साथ θ कोण बनाता है, तो $A_x = A\cos\theta$, $A_y = A\sin\theta$ तथा
$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2},\ \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}.$$
11. *विश्लेषणात्मक विधि* से भी सदिशों को आसानी से जोड़ा जा सकता है । यदि x-y समतल में दो सदिशों **A** व **B** का योग **R** हो, तो
$$\mathbf{R} = R_x\,\hat{\mathbf{i}} + R_y\,\hat{\mathbf{j}} \quad \text{जहाँ } R_x = A_x + B_x \text{ तथा } R_y = A_y + B_y$$
12. समतल में किसी वस्तु की स्थिति सदिश **r** को प्रायः निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :
$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$$
स्थिति सदिशों **r** व **r′** के बीच के विस्थापन को निम्न प्रकार से लिखते हैं :
$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}' - \mathbf{r}\\ &= (x' - x)\,\hat{\mathbf{i}} + (y' - y)\,\hat{\mathbf{j}}\\ &= \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

13. यदि कोई वस्तु समय अंतराल Δt में $\Delta\mathbf{r}$ से विस्थापित होती है तो उसका औसत वेग $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ होगा । किसी क्षण t पर वस्तु का वेग उसके औसत वेग के सीमान्त मान के बराबर होता है जब Δt शून्य के सन्निकट हो जाता है । अर्थात्

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

इसे एकांक सदिशों के रूप में भी व्यक्त करते हैं :

$$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहाँ $$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

जब किसी निर्देशांक निकाय में कण की स्थिति को दर्शाते हैं, तो $\mathbf{v}$ की दिशा कण के पथ के वक्र की उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है ।

14. यदि वस्तु का वेग Δt समय अंतराल में $\mathbf{v}$ से $\mathbf{v}'$ में बदल जाता है, तो उसका औसत त्वरण $\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$ होगा ।

जब Δt का सीमान्त मान शून्य हो जाता है तो किसी क्षण t पर वस्तु का त्वरण $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ होगा ।

घटक के पदों में इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

यहाँ,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

15. यदि एक वस्तु किसी समतल में एकसमान त्वरण $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ से गतिमान है तथा क्षण t=0 पर उसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}_o$ है, तो किसी अन्य क्षण t पर उसका स्थिति सदिश $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ होगा तथा उसका वेग $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$ होगा ।

यहाँ $\mathbf{v}_0$, $t = 0$ क्षण पर वस्तु के वेग को व्यक्त करता है ।

घटक के रूप में

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_o + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

किसी समतल में एकसमान त्वरण की गति को दो अलग-अलग समकालिक एकविमीय व परस्पर लंबवत् गतियों के अध्यारोपण के रूप में मान सकते हैं ।

16. प्रक्षेपित होने के उपरांत जब कोई वस्तु उड़ान में होती है तो उसे *प्रक्षेप्य* कहते हैं । यदि x-अक्ष से θ_0 कोण पर वस्तु का प्रारंभिक वेग v_0 है तो t क्षण के उपरांत प्रक्षेप्य के स्थिति एवं वेग संबंधी समीकरण निम्नवत् होंगे–

$$x = (v_0 \cos\theta_0)\, t$$

$$y = (v_0 \sin\theta_0)\, t - (1/2)\, g\, t^2$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

प्रक्षेप्य का पथ परवलयिक होता है जिसका समीकरण

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{gx^2}{2\,(v_o \cos\theta_o)^2} \text{ होगा ।}$$

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई $h_m = \frac{(v_o \sin\theta_o)^2}{2g}$, तथा

इस ऊँचाई तक पहुंचने में लगा समय $t_m = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$ होगा।

प्रक्षेप्य द्वारा अपनी प्रारंभिक स्थिति से उस स्थिति तक, जिसके लिए नीचे उतरते समय $y = 0$ हो, चली गई क्षैतिज दूरी को प्रक्षेप्य का परास R कहते हैं ।

अत: प्रक्षेप्य का परास $R = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\theta_o$ होगा ।

17. जब कोई वस्तु एकसमान चाल से एक वृत्तीय मार्ग में चलती है तो इसे *एकसमान वृत्तीय गति* कहते हैं । यदि वस्तु की चाल v हो तथा इसकी त्रिज्या R हो, तो अभिकेंद्र त्वरण, $a_c = v^2/R$ होगा तथा इसकी दिशा सदैव वृत्त के केंद्र की ओर होगी । कोणीय चाल ω कोणीय दूरी के समान परिवर्तन की दर होता है । रैखिक वेग $v = \omega R$ होगा तथा त्वरण $a_c = \omega^2 R$ होगा।
यदि वस्तु का आवर्तकाल T तथा आवृत्ति ν हो, तो ω, v तथा a_c के मान निम्नवत् होंगे ।

$$\omega = 2\pi\nu, \quad v = 2\pi\nu R, \quad a_c = 4\pi^2\nu^2 R$$

भौतिक राशि	प्रतीक	विमा	मात्रक	टिप्पणी
स्थिति सदिश	$\mathbf{r}$	[L]	m	सदिश । किसी अन्य चिह्न से भी इसे व्यक्त कर सकते हैं
विस्थापन	$\Delta\mathbf{r}$	[L]	m	,,
वेग		$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
(a) औसत	$\bar{\mathbf{v}}$			$= \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, सदिश
(b) तात्क्षणिक	$\mathbf{v}$			$= d\mathbf{v}/dt$, सदिश
त्वरण		$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
(a) औसत	$\bar{\mathbf{a}}$			$= \Delta\mathbf{v}/\Delta t$, सदिश
(b) तात्क्षणिक	$\mathbf{a}$			$= d\mathbf{v}/dt$, सदिश
प्रक्षेप्य गति				
(a) अधिकतम ऊंचाई में लगा समय	t_m	[T]	s	$= \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$
(b) अधिकतम ऊंचाई	h_m	[L]	m	$= \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$
(c) क्षैतिज परास	R	[L]	m	$= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
वृत्तीय गति				
(a) कोणीय चाल	ω	$[T^{-1}]$	rad/s	$= \Delta\theta/\Delta t = v/R$
(b) अभिकेंद्र त्वरण	a_c	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$= v^2/R$

विचारणीय विषय

1. किसी वस्तु द्वारा दो बिंदुओं के बीच की पथ-लंबाई सामान्यतया, विस्थापन के परिमाण के बराबर नहीं होती । विस्थापन केवल पथ के अंतिम बिंदुओं पर निर्भर करता है जबकि पथ-लंबाई (जैसाकि नाम से ही स्पष्ट है) वास्तविक पथ पर निर्भर करती है । दोनों राशियां तभी बराबर होंगी जब वस्तु गति मार्ग में अपनी दिशा नहीं बदलती । अन्य दूसरी परिस्थितियों में पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण से अधिक होती है ।
2. उपरोक्त बिंदु 1 की दृष्टि से वस्तु की औसत चाल किसी दिए समय अंतराल में या तो उसके औसत वेग के परिमाण के बराबर होगी या उससे अधिक होगी । दोनों बराबर तब होंगी जब पथ-लंबाई विस्थापन के परिमाण के बराबर हो ।
3. सदिश समीकरण (3.33) तथा (3.34) अक्षों के चुनाव पर निर्भर नहीं करते हैं । नि:संदेह आप उन्हें दो स्वतंत्र अक्षों के अनुदिश वियोजित कर सकते हैं ।
4. एकसमान त्वरण के लिए शुद्धगतिकी के समीकरण एकसमान वृत्तीय गति में लागू नहीं होते क्योंकि इसमें त्वरण का परिमाण तो स्थिर रहता है परंतु उसकी दिशा निरंतर बदलती रहती है ।
5. यदि किसी वस्तु के दो वेग $\mathbf{v}_1$ तथा $\mathbf{v}_2$ हों तो उनका परिणामी वेग $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ होगा । उपरोक्त सूत्र तथा वस्तु 2 के सापेक्ष वस्तु का 1 के वेग अर्थात्: $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ के बीच भेद को भलीभांति जानिए । यहां $\mathbf{v}_1$ तथा $\mathbf{v}_2$ किसी उभयनिष्ठ निर्देश तन्त्र के सापेक्ष वस्तु की गतियां हैं ।
6. वृत्तीय गति में किसी कण का परिणामी त्वरण वृत्त के केंद्र की ओर होता है यदि उसकी चाल एकसमान है ।
7. किसी वस्तु की गति के मार्ग की आकृति केवल त्वरण से ही निर्धारित नहीं होती बल्कि वह गति की प्रारंभिक दशाओं (प्रारंभिक स्थिति व प्रारंभिक वेग) पर भी निर्भर करती है । उदाहरणस्वरूप, एक ही गुरुत्वीय त्वरण से गतिमान किसी वस्तु का मार्ग एक सरल रेखा भी हो सकता है या कोई परवलय भी, ऐसा प्रारंभिक दशाओं पर निर्भर करेगा ।

अभ्यास

3.1 निम्नलिखित भौतिक राशियों में से बतलाइए कि कौन-सी सदिश हैं और कौन-सी अदिश :

आयतन, द्रव्यमान, चाल, त्वरण, घनत्व, मोल संख्या, वेग, कोणीय आवृत्ति, विस्थापन, कोणीय वेग।

3.2 निम्नांकित सूची में से दो अदिश राशियों को छाँटिए–

बल, कोणीय संवेग, कार्य, धारा, रैखिक संवेग, विद्युत क्षेत्र, औसत वेग, चुंबकीय आघूर्ण, आपेक्षिक वेग।

3.3 निम्नलिखित सूची में से एकमात्र सदिश राशि को छाँटिए–

ताप, दाब, आवेग, समय, शक्ति, पूरी पथ-लंबाई, ऊर्जा, गुरुत्वीय विभव, घर्षण गुणांक, आवेश।

3.4 कारण सहित बताइए कि अदिश तथा सदिश राशियों के साथ क्या निम्नलिखित बीजगणितीय संक्रियाएँ अर्थपूर्ण हैं?

(a) दो अदिशों को जोड़ना, (b) एक ही विमाओं के एक सदिश व एक अदिश को जोड़ना, (c) एक सदिश को एक अदिश से गुणा करना, (d) दो अदिशों का गुणन, (e) दो सदिशों को जोड़ना, (f) एक सदिश के घटक को उसी सदिश से जोड़ना।

3.5 निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण सहित बताइए कि यह सत्य है या असत्य :

(a) किसी सदिश का परिमाण सदैव एक अदिश होता है, (b) किसी सदिश का प्रत्येक घटक सदैव अदिश होता है, (c) किसी कण द्वारा चली गई पथ की कुल लंबाई सदैव विस्थापन सदिश के परिमाण के बराबर होती है, (d) किसी कण की औसत चाल (पथ तय करने में लगे समय द्वारा विभाजित कुल पथ-लंबाई) समय के समान-अंतराल में कण के औसत वेग के परिमाण से अधिक या उसके बराबर होती है । (e) उन तीन सदिशों का योग जो एक समतल में नहीं हैं, कभी भी शून्य सदिश नहीं होता ।

3.6 निम्नलिखित असमिकाओं की ज्यामिति या किसी अन्य विधि द्वारा स्थापना कीजिए :

(a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(b) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \geq ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

(c) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

(d) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \ge ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$

इनमें समिका (समता) का चिह्न कब लागू होता है ?

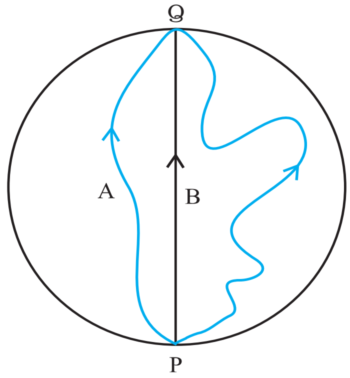
3.7 दिया है $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$, नीचे दिए गए कथनों में से कौन–सा सही है :

(a) **a, b, c** तथा **d** में से प्रत्येक शून्य सदिश है,

(b) **(a + c)** का परिमाण **(b + d)** के परिमाण के बराबर है,

(c) **a** का परिमाण **b, c** तथा **d** के परिमाणों के योग से कभी भी अधिक नहीं हो सकता,

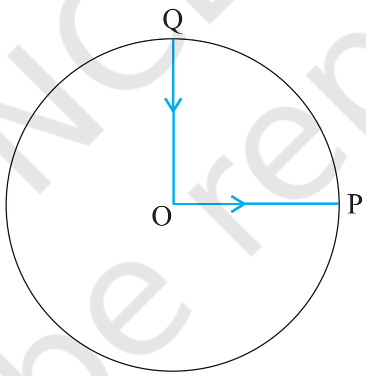
(d) यदि **a** तथा **d** संरेखीय नहीं हैं तो **b + c** अवश्य ही **a** तथा **d** के समतल में होगा, और यह **a** तथा **d** के अनुदिश होगा यदि वे संरेखीय हैं ।



चित्र 3.19

3.8 तीन लड़कियाँ 200 m त्रिज्या वाली वृत्तीय बर्फीली सतह पर स्केटिंग कर रही हैं । वे सतह के किनारे के बिंदु P से स्केटिंग शुरू करती हैं तथा P के व्यासीय विपरीत बिंदु Q पर विभिन्न पथों से होकर पहुँचती हैं जैसा कि चित्र 3.19 में दिखाया गया है । प्रत्येक लड़की के विस्थापन सदिश का परिमाण कितना है ? किस लड़की के लिए यह वास्तव में स्केट किए गए पथ की लंबाई के बराबर है ।

3.9 कोई साइकिल सवार किसी वृत्तीय पार्क के केंद्र O से चलना शुरू करता है तथा पार्क के किनारे P पर पहुँचता है। पुनः वह पार्क की परिधि के अनुदिश साइकिल चलाता हुआ QO के रास्ते (जैसा चित्र 3.20 में दिखाया गया है) केंद्र पर वापस आ जाता है । पार्क की त्रिज्या 1 km है । यदि पूरे चक्कर में 10 मिनट लगते हों तो साइकिल सवार का (a) कुल विस्थापन, (b) औसत वेग, तथा (c) औसत चाल क्या होगी?



चित्र 3.20

3.10 किसी खुले मैदान में कोई मोटर चालक एक ऐसा रास्ता अपनाता है जो प्रत्येक 500 m के बाद उसके बाईं ओर 60° के कोण पर मुड़ जाता है। किसी दिए मोड़ से शुरू होकर मोटर चालक का तीसरे, छठे व आठवें मोड़ पर विस्थापन बताइए। प्रत्येक स्थिति में मोटर चालक द्वारा इन मोड़ों पर तय की गई कुल पथ-लंबाई के साथ विस्थापन के परिमाण की तुलना कीजिए।

3.11 कोई यात्री किसी नए शहर में आया है और वह स्टेशन से किसी सीधी सड़क पर स्थित किसी होटल तक जो 10 km दूर है, जाना चाहता है। कोई बेईमान टैक्सी चालक 23 km के चक्करदार रास्ते से उसे ले जाता है और 28 मिनट में होटल में पहुँचता है।

(a) टैक्सी की औसत चाल, और (b) औसत वेग का परिमाण क्या होगा? क्या वे बराबर हैं?

3.12 किसी लंबे हाल की छत 25 m ऊंची है । वह अधिकतम क्षैतिज दूरी कितनी होगी जिसमें 40 m s^{-1} की चाल से फेंकी गई कोई गेंद छत से टकराए बिना गुजर जाए ?

3.13 क्रिकेट का कोई खिलाड़ी किसी गेंद को 100 m की अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है । वह खिलाड़ी उसी गेंद को जमीन से ऊपर कितनी ऊंचाई तक फेंक सकता है ?

3.14 80 cm लंबे धागे के एक सिरे पर एक पत्थर बाँधा गया है और इसे किसी एकसमान चाल के साथ किसी क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है । यदि पत्थर 25 s में 14 चक्कर लगाता है तो पत्थर के त्वरण का परिमाण और उसकी दिशा क्या होगी ?

3.15 कोई वायुयान 900 km h^{-1} की एकसमान चाल से उड़ रहा है और 1.00 km त्रिज्या का कोई क्षैतिज लूप बनाता है । इसके अभिकेंद्र त्वरण की गुरुत्वीय त्वरण के साथ तुलना कीजिए ।

3.16 नीचे दिए गए कथनों को ध्यानपूर्वक पढ़िए और कारण देकर बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य :

(a) वृत्तीय गति में किसी कण का नेट त्वरण हमेशा वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश केंद्र की ओर होता है ।

(b) किस बिंदु पर किसी कण का वेग सदिश सदैव उस बिंदु पर कण के पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश होता है।

(c) किसी कण का एकसमान वृत्तीय गति में एक चक्र में लिया गया औसत त्वरण सदिश एक शून्य सदिश होता है।

3.17 किसी कण की स्थिति सदिश निम्नलिखित है :

$$\mathbf{r} = (3.0t\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0t^2\,\hat{\mathbf{j}} + 4.0\,\hat{\mathbf{k}})\,\text{m}$$

समय t सेकंड में है तथा सभी गुणकों के मात्रक इस प्रकार से हैं कि $\mathbf{r}$ में मीटर में व्यक्त हो जाए ।

(a) कण का $\mathbf{v}$ तथा $\mathbf{a}$ निकालिए,

(b) t = 2.0 s पर कण के वेग का परिमाण तथा दिशा कितनी होगी ?

3.18 कोई कण t = 0 क्षण पर मूल बिंदु से $10\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m s}^{-1}$ के वेग से चलना प्रारंभ करता है तथा x-y समतल में एकसमान त्वरण $(8.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m s^{-2} से गति करता है ।

(a) किस क्षण कण का x-निर्देशांक 16 m होगा ? इसी समय इसका y-निर्देशांक कितना होगा ?

(b) इस क्षण कण की चाल कितनी होगी ?

3.19 $\hat{\mathbf{i}}$ व $\hat{\mathbf{j}}$ क्रमशः x- व y-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश हैं । सदिशों $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण तथा दिशा क्या होगा ? सदिश $\mathbf{A}=2\,\hat{\mathbf{i}}+3\,\hat{\mathbf{j}}$ के $\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$ के दिशाओं के अनुदिश घटक निकालिए। [आप ग्राफी विधि का उपयोग कर सकते हैं]

3.20 किसी दिक्स्थान पर एक स्वेच्छ गति के लिए निम्नलिखित संबंधों में से कौन–सा सत्य है ?

(a) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = (1/2)\,(\mathbf{v}(t_1) + \mathbf{v}(t_2))$

(b) $\mathbf{v}_{\text{औसत}} = [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)]\,/(t_2 - t_1)$

(c) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}\,t$

(d) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)\,t + (1/2)\,\mathbf{a}\,t^2$

(e) $\mathbf{a}_{\text{औसत}} = [\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)]\,/(t_2 - t_1)$

यहाँ 'औसत' का आशय समय अंतराल t_2 व t_1 से संबंधित भौतिक राशि के औसत मान से है ।

3.21 निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए तथा कारण एवं उदाहरण सहित बताइए कि क्या यह सत्य है या असत्य :

अदिश वह राशि है जो

(a) किसी प्रक्रिया में संरक्षित रहती है,

(b) कभी ऋणात्मक नहीं होती,

(c) विमाहीन होती है,

(d) किसी स्थान पर एक बिंदु से दूसरे बिंदु के बीच नहीं बदलती,

(e) उन सभी दर्शकों के लिए एक ही मान रखती है चाहे अक्षों से उनके अभिविन्यास भिन्न-भिन्न क्यों न हों ।

3.22 कोई वायुयान पृथ्वी से 3400 m की ऊंचाई पर उड़ रहा है । यदि पृथ्वी पर किसी अवलोकन बिंदु पर वायुयान की 10.0 s की दूरी की स्थितियां 30° का कोण बनाती हैं तो वायुमान की चाल क्या होगी ?

11088CH05

अध्याय 4

गति के नियम

4.1 भूमिका

पिछले अध्याय में हमारा संबंध दिक्स्थान में किसी कण की गति का मात्रात्मक वर्णन करने से था। हमने देखा कि एकसमान गति में मात्र वेग की संकल्पना की आवश्यकता थी जबकि असमान गति में त्वरण की अवधारणा की अतिरिक्त आवश्यकता पड़ी। अब तक हमने यह प्रश्न नहीं पूछा है कि पिण्डों की गति का क्या कारण है ? इस अध्याय में हम अपना ध्यान भौतिकी के इस मूल प्रश्न पर केंद्रित करेंगे।

आइए, सबसे पहले हम अपने सामान्य अनुभवों के आधार पर इस प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाएँ। विरामावस्था में पड़ी फुटबाल को गति प्रदान करने के लिए किसी न किसी को उस पर अवश्य ठोकर मारनी होती है । किसी पत्थर को ऊपर की ओर फेंकने के लिए, हमें उसे ऊपर की ओर प्रक्षेपित करना पड़ता है। मंद पवन पेड़ की शाखाओं को झुला देती है; प्रबल वायु का झोंका तो भारी पिण्डों तक को भी लुढ़का सकता है ! बहती नदी किसी के न खेने पर भी नाव को गतिमान कर देती है। स्पष्टतः किसी पिण्ड को विराम से गति में लाने के लिए किसी बाह्य साधन द्वारा बल लगाने की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार गति को रोकने अथवा मंद करने के लिए भी बाह्य बल की आवश्यकता होती है। किसी आनत तल पर नीचे की ओर लुढ़कती किसी गेंद को उसकी गति की विपरीत दिशा में बल लगाकर रोका जा सकता है।

इन उदाहरणों में, बल का बाह्य साधन (हाथ, वायु, जलधारा, आदि) पिण्ड के संपर्क में है। परंतु यह सदैव आवश्यक नहीं है। किसी भवन के शिखर से बिना अधोमुखी धक्का दिये मुक्त किया गया पत्थर पृथ्वी के गुरुत्वीय खिंचाव के कारण त्वरित हो जाता है। कोई छड़ चुंबक लोहे की कीलों को दूर से ही, अपनी ओर आकर्षित कर लेता है। ***यह दर्शाता है कि बाह्य साधन (इन उदाहरणों में गुरुत्वीय एवं चुंबकीय बल) एक दूरी से भी किसी पिण्ड पर बल लगा सकता है।***

संक्षेप में, किसी रुके हुए पिण्ड को गति प्रदान करने तथा गतिमान पिण्ड को रोकने के लिए बल की आवश्यकता होती है, तथा इस बल को प्रदान करने के लिए किसी बाह्य साधन की आवश्यकता होती है। यह बाह्य साधन उस पिण्ड के संपर्क में भी हो सकता है, और नहीं भी।

यहाँ तक तो सब सही है। परंतु तब क्या होता है जब कोई पिण्ड एकसमान गति से चलता है (उदाहरण के लिए, बर्फ के क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल

से सीधी रेखा में गतिमान कोई स्केटर) ? ***क्या किसी पिण्ड की एकसमान गति बनाए रखने के लिए कोई बाह्य बल आवश्यक है ?***

4.2 अरस्तू की भ्रामकता

उपरोक्त प्रश्न सरल प्रतीत होता है। तथापि इसका उत्तर देने में कई युग लग गए थे। वस्तुत: सत्रहवीं शताब्दी में गैलीलियो द्वारा दिए गए इस प्रश्न का सही उत्तर न्यूटनी यांत्रिकी का आधार बना जिसने आधुनिक विज्ञान के जन्म का संकेत दिया।

महान ग्रीक विचारक, अरस्तू (384 ई.पू. – 322 ई.पू.) ने यह विचार रखा कि यदि कोई पिण्ड गतिमान है, तो उसे उसी अवस्था में बनाए रखने के लिए कोई न कोई बाह्य साधन अवश्य चाहिए। उदाहरण के लिए, इस विचार के अनुसार किसी धनुष से छोड़ा गया तीर उड़ता रहता है, क्योंकि तीर के पीछे की वायु उसे धकेलती रहती है। यह अरस्तू द्वारा विकसित विश्व में पिण्डों की गतियों से संबंधित विचारों के विस्तृत ढाँचे का एक भाग था। गति के विषय में अरस्तू के अधिकांश विचार अब गलत माने जाते हैं, और उनकी अब चिंता करने की आवश्यकता नहीं है। अपने काम के लिए हम यहाँ अरस्तू के गति के नियम को इस प्रकार लिख सकते हैं : ***किसी पिण्ड को गतिशील रखने के लिए बाह्य बल की आवश्यकता होती है।***

जैसा कि हम आगे देखेंगे, अरस्तू का गति का नियम दोषयुक्त है। तथापि, यह एक स्वाभाविक विचार है, जो कोई भी व्यक्ति अपने सामान्य अनुभवों से रख सकता है। अपनी सामान्य खिलौना कार (अवैद्युत) से फर्श पर खेलती छोटी बालिका भी अपने अंतर्ज्ञान से यह जानती है कि कार को चलती रखने के लिए उस पर बंधी डोरी का स्थायी रूप से कुछ बल लगाकर बराबर खींचना होगा। यदि वह डोरी को छोड़ देती है तो कुछ क्षण बाद कार रुक जाती है। अधिकांश स्थलीय गतियों में यही सामान्य अनुभव होता है। पिण्डों को गतिशील बनाए रखने के लिए बाह्य बलों की आवश्यकता प्रतीत होती है। स्वतंत्र छोड़ देने पर सभी वस्तुएं अंतत: रुक जाती हैं।

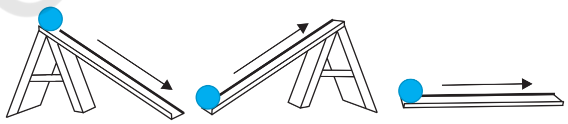
फिर अरस्तू के तर्क में क्या दोष है ? इसका उत्तर है : गतिशील खिलौना कार इसलिए रुक जाती है कि फर्श द्वारा कार पर लगने वाला बाह्य घर्षण बल इसकी गति का विरोध करता है। इस बल को निष्फल करने के लिए बालिका को कार पर गति की दिशा में बाह्य बल लगाना पड़ता है। जब कार एकसमान गति में होती है तब उस पर कोई नेट बाह्य बल कार्य नहीं करता; बालिका द्वारा लगाया गया बल फर्श के बल (घर्षण बल) को निरस्त कर देता है। इसका उपप्रमेय है : यदि कोई घर्षण न हो, तो बालिका को खिलौना कार की एकसमान गति बनाए रखने के लिए, कोई भी बल लगाने की आवश्यकता नहीं पड़ती।

प्रकृति में सदैव ही विरोधी घर्षण बल (ठोसों के बीच) अथवा श्यान बल (तरलों के बीच) आदि उपस्थित रहते हैं। यह उन व्यावहारिक अनुभवों से स्पष्ट है जिनके अनुसार वस्तुओं में एकसमान गति बनाए रखने के लिए घर्षण बलों को निष्फल करने हेतु बाह्य साधनों द्वारा बल लगाना आवश्यक होता है। अब हम समझ सकते हैं कि अरस्तू से त्रुटि कहां हुई। उसने अपने इस व्यावहारिक अनुभव को एक मौलिक तर्क का रूप दिया। गति तथा बलों के लिए प्रकृति के यथार्थ नियम को जानने के लिए हमें एक ऐसे आदर्श संसार की कल्पना करनी होगी जिसमें बिना किसी विरोधी घर्षण बल लगे एकसमान गति का निष्पादन होता है। यही गैलीलियो ने किया था।

4.3 जड़त्व का नियम

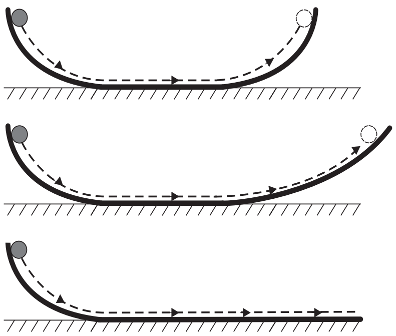
गैलीलियो ने वस्तुओं की गति का अध्ययन एक आनत समतल पर किया था। किसी (i) आनत समतल पर नीचे की ओर गतिमान वस्तुएं त्वरित होती हैं जबकि (ii) तल पर ऊपर की ओर जाने वाली वस्तुओं में मंदन होता है। क्षैतिज समतल पर गति (iii) इन दोनों के बीच की स्थिति है। गैलीलियो ने यह निष्कर्ष निकाला कि किसी घर्षण रहित क्षैतिज समतल पर गतिशील किसी वस्तु में न तो त्वरण होना चाहिए और न ही मंदन, अर्थात् इसे एकसमान वेग से गति करनी चाहिए (चित्र 4.1 (a))।

गैलीलियो के एक अन्य प्रयोग जिसमें उन्होंने द्विआनत समतल का उपयोग किया, से भी यही निष्कर्ष निकलता है। एक आनत समतल पर विरामावस्था से छोड़ी गई गेंद नीचे लुढ़कती है और दूसरे आनत समतल पर ऊपर चढ़ती है। यदि दोनों आनत समतलों के पृष्ठ अधिक रुक्ष नहीं हैं तो गेंद की अंतिम ऊंचाई उसकी आरंभिक ऊंचाई के लगभग समान (कुछ कम, परंतु अधिक कभी नहीं) होती है। आदर्श स्थिति में, जब घर्षण बल पूर्णत: विलुप्त कर दिया जाता है, तब गेंद की अंतिम ऊंचाई उसकी आरंभिक ऊंचाई के समान होनी चाहिए।



चित्र 4.1 (a)

अब यदि दूसरे समतल के ढाल को घटाकर प्रयोग को दोहराएं, तो फिर भी गेंद उसी ऊंचाई तक पहुंचेगी, परंतु ऐसा करने पर वह अधिक दूरी चलेगी। सीमान्त स्थिति में, जब दूसरे समतल का ढाल शून्य है (अर्थात् वह क्षैतिज समतल है) तब गेंद अनन्त दूरी तक चलती है। दूसरे शब्दों में इसकी गति कभी नहीं रुकेगी। नि:संदेह यह एक आदर्श स्थिति है (चित्र 4.1 (b))। व्यवहार में गेंद क्षैतिज समतल पर एक परिमित दूरी तक चलने के बाद बाह्य विरोधी घर्षण बल जिसे पूर्ण रूप से विलुप्त नहीं किया जा सकता, के कारण विराम में आ जाती है। तथापि निष्कर्ष स्पष्ट है : यदि घर्षण न होता तो गेंद क्षैतिज समतल पर एकसमान वेग से निरंतर चलती रहती।



चित्र 4.1 (b) द्विआनत समतल पर गति के प्रेक्षणों से गैलीलियो ने जड़त्व का नियम अनुमानित किया।

इस प्रकार गैलीलियो को गति के संबंध में एक नई अंतर्दृष्टि प्राप्त हुई, जो अरस्तू तथा उनके अनुयायिओं को समझ में नहीं आई। गतिकी में विरामावस्था तथा एकसमान रैखिक गति की अवस्था (अर्थात् एकसमान वेग से गति) तुल्य होती हैं। दोनों ही प्रकरणों में पिण्ड पर कोई नेट बल नहीं लगता। यह सोचना त्रुटिपूर्ण है कि किसी पिण्ड की एकसमान गति के लिए उस पर कोई नेट बल लगाना आवश्यक है। किसी पिण्ड को एकसमान गति में बनाए रखने के लिए हमें घर्षण बल को निष्फल करने के लिए एक बाह्य बल लगाने की आवश्यकता होती है ताकि पिण्ड पर लगे दोनों बाह्य बलों का नेट बाह्य बल शून्य हो जाए।

सारांश में, यदि नेट बाह्य बल शून्य है तो विराम अवस्था में रह रहा पिण्ड विरामावस्था में ही रहता है और गतिशील पिण्ड निरंतर एकसमान वेग से गतिशील रहता है। वस्तु के इस गुण को जड़त्व कहते हैं। जड़त्व से तात्पर्य है ***"परिवर्तन के प्रति प्रतिरोध"***। कोई पिण्ड अपनी विरामावस्था अथवा एकसमान गति की अवस्था में तब तक कोई परिवर्तन नहीं करता जब तक कोई बाह्य बल उसे ऐसा करने के लिए विवश नहीं करता।

4.4 न्यूटन का गति का प्रथम नियम

गैलीलियो की सरल परंतु क्रांतिकारी धारणाओं ने अरस्तू की यांत्रिकी को पूर्णतया नकार दिया। अब एक नई यांत्रिकी का विकास किया जाना था। विशिष्ट रूप से, इस कार्य को सर आइजक न्यूटन ने जिन्हें सभी युगों का महानतम वैज्ञानिक माना जाता है, लगभग अकेले ही संपन्न किया।

न्यूटन ने गैलीलियो की धारणाओं के आधार पर गति के तीन नियमों जो उनके नाम से जाने जाते हैं, के रूप में एक यांत्रिकी की आधारशिला रखी। गैलीलियो का जड़त्व का नियम उसका आरंभ बिंदु था जिसका न्यूटन ने ***'गति के प्रथम नियम'*** के रूप में संरूपण किया :

"प्रत्येक पिण्ड तब तक अपनी विरामावस्था अथवा सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में रहता है जब तक कोई बाह्य बल उसे अन्यथा व्यवहार करने के लिए विवश नहीं करता।"

अब विरामावस्था अथवा एकसमान रैखिक गति दोनों ही में "शून्य त्वरण" समाविष्ट है। अतः गति के प्रथम नियम को, सरल शब्दों में, इस प्रकार भी व्यक्त किया जा सकता है :

यदि किसी पिण्ड पर लगने वाला नेट बाह्य बल शून्य है, तो उसका त्वरण शून्य होता है। शून्येतर त्वरण केवल तभी हो सकता है जब पिण्ड पर कोई नेट बाह्य बल लगता हो।

व्यवहार में इस नियम के अनुप्रयोग से हमें दो प्रकार की स्थितियों से सामना करना होता है। कुछ उदाहरणों में तो हम यह जानते हैं कि वस्तु पर नेट बाह्य बल शून्य होता है। उसमें हम यह निष्कर्ष

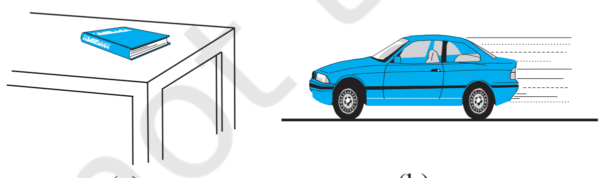
प्राचीन भारतीय विज्ञान में गति संबंधी धारणाएँ

प्राचीन भारतीय विचारकों ने भी गति संबंधी धारणाओं की एक विस्तृत प्रणाली विकसित कर ली थी। बल जो गति का कारण है, भिन्न प्रकार का माना गया : सतत दाब के कारण बल (जिसे नोदन कहा गया) जैसे जल-यात्रा करते पाल-यानों पर लगने वाला पवन का बल; संघट्ट (अभिघात) जो कुम्भकार द्वारा चाक को छड़ से घुमाने पर लगता है; सरल रैखिक गति (वेग) के लिए अथवा प्रत्यास्थ पिण्डों में आकृति के प्रत्यानयन की दीर्घस्थायी प्रवृत्ति (संस्कार); डोरी, छड़ आदि से संचारित बल। गति के **'वैशेषिका'** सिद्धांत में वेगों की संकल्पना कदाचित जड़त्व की संकल्पना के समीपस्थ है। वेग, सरल रेखा में चलने की प्रवृत्ति का विरोध संपर्क में आने वाली वस्तुओं जिनमें वायुमण्डल भी शामिल है, के द्वारा होता है ऐसा माना गया। यह घर्षण तथा वायु-प्रतिरोध के विचार के समान विचार है। उनका यह अनुमान सही था कि पिण्डों की विभिन्न प्रकार की गतियां (स्थानांतरीय, घूर्णी तथा कंपन) उस पिण्ड के अवयवी कणों की केवल स्थानांतरीय गति के कारण ही उत्पन्न होती हैं। पवन में गिरती किसी पत्ती की कुल मिलाकर अधोमुखी गति (**पतन**) हो सकती है और साथ ही उसमें घूर्णी तथा कंपन गति (भ्रमण, स्पंदन) भी हो सकती हैं, परंतु किसी क्षण उस पत्ती के प्रत्येक कण में केवल एक निश्चित (लघु) विस्थापन होता है। गति की माप तथा लंबाई एवं समय के मात्रकों के विषय में भारतीय चिन्तन में यथेष्ट बल दिया गया। यह ज्ञात था कि दिक्स्थान में किसी कण की स्थिति को उसकी तीन अक्षों से दूरियां मापकर निर्दिष्ट किया जा सकता था। भास्कर (1150 ई.) ने तात्क्षणिक गति (**तात्कालिकी गति**) की अवधारणा प्रस्तावित की जिससे अवकल गणित के प्रयोग द्वारा तात्क्षणिक वेग की आधुनिक संकल्पना का पूर्वज्ञान हुआ। तरंग तथा धारा (जल की) के बीच अंतर को भली-भाँति समझा जा चुका था; धारा गुरुत्व तथा तरलता के अंतर्गत जल कणों की गति है जबकि तरंग जल कणों के कंपन के संचरण का परिणाम है।

निकाल सकते हैं कि वस्तु का त्वरण शून्य है। उदाहरण के लिए, अंतरा तारकीय आकाश में सभी गुरुत्वीय वस्तुओं से बहुत दूर किसी अंतरिक्षयान, जिसके सभी राकेट बंद किए जा चुके हों, पर कोई नेट बाह्य बल कार्यरत नहीं होता। गति के प्रथम नियम के अनुसार इसका त्वरण शून्य होना चाहिए। यदि यह गति में है, तो इसे एकसमान वेग से गतिशील रहना चाहिए।

तथापि, बहुधा हमें आरम्भ में सभी बलों का ज्ञान नहीं होता । उस अवस्था में, यदि हमें यह ज्ञात हो कि कोई वस्तु अत्वरित है (अर्थात् वह वस्तु या तो विरामावस्था में है अथवा एकसमान रैखिक गति में है) तब हम गति के प्रथम नियम के आधार पर यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि उस वस्तु पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए। गुरुत्व हर स्थान पर है। विशेष रूप से, पार्थिव परिघटनाओं में, पृथ्वी पर स्थित सभी वस्तुएं पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण का अनुभव करती हैं। साथ ही, गतिशील वस्तुएं सदैव ही घर्षण बल, श्यान कर्षण आदि का अनुभव करती हैं । तब यदि पृथ्वी पर स्थित कोई वस्तु विरामावस्था अथवा एकसमान रैखिक गति में हो, तब ऐसा होने का कारण यह नहीं है कि उस पर कोई बल कार्यरत नहीं है, वरन् उस पर कार्यरत विभिन्न बाह्य बल एक दूसरे को निरस्त करके सभी बलों के योग को 'शून्य नेट बाह्य बल' बनाते हैं।

अब मेज पर विराम अवस्था में रखी एक पुस्तक पर विचार करते हैं (चित्र 4.2(a))। इस पुस्तक पर दो बाह्य बल कार्यरत हैं : गुरुत्वीय बल (अर्थात् पुस्तक का भार W) नीचे की दिशा में कार्यरत है तथा मेज द्वारा पुस्तक पर ऊपर की दिशा में अभिलंब बल R कार्यरत है। R स्वयं समायोजित होने वाला बल है । यह ऊपर वर्णित दूसरी प्रकार की स्थिति का उदाहरण है। बलों के बारे में तो पूर्ण ज्ञान नहीं है परंतु गति की अवस्था ज्ञात है। हम पुस्तक को विराम की स्थिति में देखते हैं। अतः गति के प्रथम नियम के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि R का परिमाण W के परिमाण के समान है। हमारा प्रायः इस प्रकथन से समागम होता है ; "चूंकि $W = R$, बल एक दूसरे को निरस्त करते हैं, इसीलिए पुस्तक विराम की स्थिति में है"। यह विवेक के विपरीत है। सही प्रकथन यह होना चाहिए: "चूंकि पुस्तक विराम में दिखाई देती है"; गति के प्रथम नियम के अनुसार इस पर नेट बाह्य बल शून्य होना चाहिए। इसका तात्पर्य है कि अभिलंब R पुस्तक के भार W के समान तथा विपरीत होना चाहिए।



(a) (b)

चित्र 4.2 (a) मेज पर विराम में रखी पुस्तक तथा (b) एकसमान वेग से गतिमान कार, इन दोनों ही प्रकरणों में नेट बाह्य बल शून्य है ।

अब हम एक कार की गति पर विचार करते हैं जिसमें वह कार विराम से गति आरंभ करके अपनी चाल में वृद्धि करती है और फिर चिकनी सीधी सड़क पर पहुंचकर एकसमान वेग से गति करती है (चित्र 4.2 (b))। जब यह विराम में होती है तब उस पर कोई नेट बल नहीं होता। चाल में वृद्धि के समय इसमें त्वरण होता है। ऐसा नेट बाह्य बल के कारण होना चाहिए। ध्यान दें, यह एक बाह्य बल ही होना चाहिए। कार के त्वरण के लिए किसी भी आंतरिक बल को उत्तरदायी नहीं माना जा सकता। सुनने में यह अद्भुत लग सकता है, परंतु यह सत्य है। सड़क के अनुदिश विचारणीय बल घर्षण बल ही है। सब बातों पर विचार करने के उपरांत यही निष्कर्ष निकलता है कि कार की गति में त्वरण का कारण घर्षण बल ही है (घर्षण के विषय में आप अनुभाग 4.9 में पढ़ेंगे)। जब कार एक समान वेग से गति करती है तब उस पर कोई नेट बाह्य बल नहीं होता ।

गति के प्रथम नियम में निहित जड़त्व का गुण बहुत-सी स्थितियों में प्रत्यक्ष दिखाई पड़ता है। मान लीजिए हम किसी रुकी हुई बस में असावधानी से खड़े हैं और यकायक ड्राइवर बस को चला देता है। हम झटके के साथ पीछे की ओर गिर पड़ते हैं। क्यों ? हमारे पैर बस के फर्श को स्पर्श कर रहे होते हैं। यदि घर्षण न होता, तो हम वहीं रहते जहां पहले थे जबकि हमारे पैरों के नीचे बस का फर्श केवल आगे की दिशा में सरकता और बस का पीछे का भाग हमसे आकर टकराता। परंतु सौभाग्यवश, हमारे पैर और फर्श के बीच कुछ घर्षण होता है। यदि बस की पिक-अप अति आकस्मिक नहीं है, अर्थात् त्वरण साधारण है तो घर्षण बल हमारे पैरों को बस के साथ त्वरित करने के लिए पर्याप्त होगा। परंतु वस्तुतः हमारा शरीर एक दृढ़ पिण्ड नहीं है। इसमें विरूपण हो सकता है, अर्थात् इसके विभिन्न भागों के बीच आपेक्ष विस्थापन संभव है । इसका तात्पर्य यह हुआ कि जब हमारे पैर बस के साथ आगे बढ़ते हैं, तो शरीर का शेष भाग जड़त्व के कारण वहीं रहता है। इसीलिए, बस के आपेक्ष हम पीछे की ओर फेंक दिए जाते हैं। जैसे ही यह घटना घटती है, शरीर के शेष भागों पर पेशीय बल (पैरों के द्वारा) कार्य करने लगते हैं, जो शरीर के शेष भाग को पैरों के साथ गति कराते हैं। इसी प्रकार की घटना तीव्र गति से चलती बस के यकायक रुकने पर घटती है। हमारे पैर घर्षण के कारण रुक जाते हैं, क्योंकि घर्षण बल पैरों तथा बस के फर्श के बीच आपेक्ष गति नहीं होने देता। परंतु शरीर का शेष भाग, जड़त्व के कारण, आगे की ओर गति करता रहता है। परिणामस्वरूप हम आगे की ओर फेंक दिए जाते हैं। प्रत्यानयनी पेशीय बलों के कार्यरत होने के कारण शरीर विराम अवस्था में आ जाती है।

▶ ***उदाहरण 4.1*** कोई अंतरिक्षयात्री अंतरातारकीय आकाश में 100 m s^{-2} की एकसमान दर से त्वरित अपने अंतरिक्षयान से दुर्घटनावश बाहर फेंक दिया जाता है । जिस क्षण अंतरिक्षयात्री अंतरिक्षयान से बाहर आ जाता है, उसके तुरंत पश्चात् अंतरिक्षयात्री का त्वरण क्या है ? (मान लीजिए कि यात्री पर गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करने के लिए उसके निकट कोई तारा नहीं है)।

हल जिस क्षण वह यात्री यान से बाहर आता है, उसी क्षण से अंतरिक्षयात्री पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं रहता क्योंकि हमने यह माना है कि यात्री पर गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करने के लिए उसके निकट कोई तारा नहीं हैं तथा अंतरिक्ष यान छोटा होने के कारण इसके द्वारा यात्री पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल उपेक्षणीय है। गति के प्रथम नियम के अनुसार अंतरिक्षयात्री का त्वरण शून्य है। ◂

4.5 न्यूटन का गति का द्वितीय नियम

गति का प्रथम नियम उस साधारण प्रकरण से संबंध रखता है जिसमें किसी पिण्ड पर नेट बाह्य बल शून्य है। गति का द्वितीय नियम उन व्यापक स्थितियों से संबंध रखता है, जिनमें पिण्ड पर कोई नेट बाह्य बल लग रहा हो। यह नियम नेट बाह्य बल और पिण्ड के त्वरण में संबंध दर्शाता है।

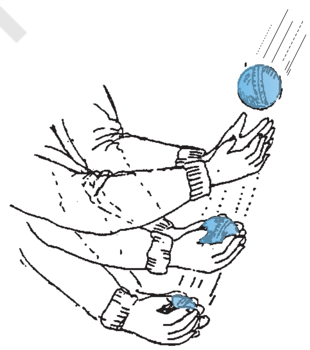
संवेग

किसी पिण्ड के संवेग को उसकी संहति m तथा वेग $\mathbf{v}$ के गुणनफल द्वारा पारिभाषित किया जाता है। इसे $\mathbf{p}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (4.1)$$

स्पष्ट रूप से संवेग एक सदिश राशि है। दैनिक जीवन के निम्नलिखित साधारण अनुभवों में पिण्डों की गतियों पर बलों के प्रभाव पर विचार करते समय हमें संवेग के महत्त्व का पता चलता है।

- मान लीजिए एक कम भार का वाहन (जैसे छोटी कार) तथा एक अधिक भार का वाहन (जैसे सामान से लदा ट्रक) दोनों ही किसी क्षैतिज सड़क पर खड़े हैं। हम सभी भलीभांति जानते हैं कि समान समय अंतराल में दोनों वाहनों को समान चाल से गति कराने में कार की तुलना में ट्रक को धकेलने के लिए अपेक्षाकृत अधिक बल की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार, यदि एक हलका पिण्ड तथा एक भारी पिण्ड दोनों समान चाल से गतिमान हैं, तो समान समय अंतराल में दोनों पिण्डों को रोकने में हलके पिण्ड की तुलना में भारी पिण्ड में अपेक्षाकृत अधिक परिमाण के विरोधी बल की आवश्यकता होती है ।
- यदि दो पत्थर, एक हलका तथा दूसरा भारी, एक ही भवन के शिखर से गिराए जाते हैं, तो धरती पर खड़े किसी व्यक्ति के लिए भारी पत्थर की तुलना में हलके पत्थर को लपकना आसान होता है। इस प्रकार किसी पिण्ड की संहति एक महत्त्वपूर्ण प्राचल है जो गति पर बल के प्रभाव को निर्धारित करता है।
- विचार करने योग्य एक अन्य महत्त्वपूर्ण प्राचल है– चाल । बंदूक से छोड़ी गई कोई गोली रुकने से पूर्व मानव ऊतक को आसानी से वेध सकती है, फलस्वरूप दुर्घटना हो जाती है। यदि उसी गोली को साधारण चाल से फेंकें तो अधिक क्षति नहीं होती। अत: किसी दी गई संहति के लिए यदि चाल अधिक हो तो उसे एक निश्चित समय अंतराल में रोकने के लिए अधिक परिमाण के विरोधी बल की आवश्यकता होती है। साथ-साथ लेने पर, संहति और वेग का गुणनफल, अर्थात संवेग, प्रत्यक्ष रूप से गति का एक प्रासंगिक चर है । यदि अधिक संवेग परिवर्तन की आवश्यकता है तो लगाने के लिए अधिक परिमाण के बल की आवश्यकता होगी।
- क्रिकेट का कोई अभ्यस्त खिलाड़ी तीव्र गति से आती गेंद को एक नौसिखिया खिलाड़ी की तुलना में कहीं अधिक आसानी से लपक लेता है जबकि नौसिखिया खिलाड़ी उसी गेंद को लपकने में हाथों में चोट खा लेता है। इसका एक कारण यह है कि अभ्यस्त खिलाड़ी, अपने हाथों से गेंद को लपक कर, उसे रोकने में अधिक समय लगाता है । आपने ध्यान दिया होगा कि अभ्यस्त खिलाड़ी गेंद को लपकने की क्रिया में अपने हाथों को पीछे की ओर खींचता है (चित्र 4.3)। जबकि नौसिखिया खिलाड़ी अपने हाथों को स्थिर रखता है तथा गेंद को लगभग तत्क्षण ही लपकने का प्रयास करता है। गेंद को तत्क्षण रोकने के लिए उसे अपेक्षाकृत काफी अधिक बल लगाना पड़ता है फलस्वरूप उसके हाथों में चोट लग जाती है। इससे निष्कर्ष निकलता है : बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि कितनी तीव्रता से यह परिवर्तन किया जाता है। समान संवेग परिवर्तन यदि अपेक्षाकृत कम समय में किया जाता है, तो अपेक्षाकृत अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है । संक्षेप में, संवेग परिवर्तन की दर अधिक है, तो बल अधिक होता है ।

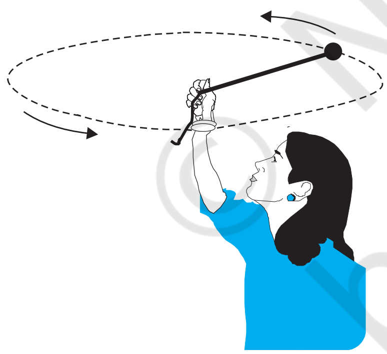


चित्र 4.3 *बल केवल संवेग परिवर्तन पर ही निर्भर नहीं करता, वरन् वह इस बात पर भी निर्भर करता है कि यह परिवर्तन कितनी तीव्रता से किया जाता है । एक अभ्यस्त खिलाड़ी गेंद लपकते समय अपने हाथों को पीछे की ओर खींचता है जिससे गेंद को रोकने में अधिक समय लगता है, जिसके लिए अपेक्षाकृत कम बल की आवश्यकता होती है ।*

- एक अत्यंत महत्त्वपूर्ण प्रेक्षण इस तथ्य की पुष्टि करता है कि संहति तथा वेग का गुणनफल (अर्थात् संवेग) ही गति पर बल के प्रभाव का मूल है। मान लीजिए, विभिन्न संहतियों के दो पिण्डों, जो आरंभ में विराम में हैं, पर कोई निश्चित बल

एक निश्चित समय अंतराल के लिए लगाया जाता है। हलका पिण्ड, अपेक्षानुसार, भारी पिण्ड की तुलना में अधिक चाल ग्रहण कर लेता है। परंतु, समय अंतराल के अंत में, प्रेक्षण यह दर्शाते हैं कि, प्रत्येक पिण्ड समान संवेग उपार्जित करता है। इस प्रकार, ***समान समय के लिए लगाया गया समान बल विभिन्न पिण्डों में समान संवेग परिवर्तन करता है।*** यह गति के द्वितीय नियम का प्रामाणिक मार्गदर्शक सिद्धांत है।

- पिछले प्रेक्षणों में संवेग का सदिश चरित्र अर्थपूर्ण नहीं रहा है। अब तक के उदाहरणों में, संवेग परिवर्तन तथा संवेग समान्तर दिशाओं में हैं। परंतु सदैव ऐसा नहीं होता। मान लीजिए, किसी डोरी द्वारा एक पत्थर को क्षैतिज समतल में एकसमान चाल से घुमाया जाता है । इसमें संवेग का परिमाण स्थिर रहता है, परंतु इसकी दिशा निरन्तर परिवर्तित होती है (चित्र 4.4)। संवेग सदिश में यह परिवर्तन करने के लिए बल की आवश्यकता होती है। यह बल डोरी से होकर पत्थर को हमारे हाथों द्वारा प्रदान किया जाता है। अनुभवों से यह संकेत मिलता है कि यदि पत्थर को अपेक्षाकृत अधिक चाल तथा/अथवा छोटी त्रिज्या के वृत्त में घुमाया जाए तो हमारे हाथों द्वारा अधिक बल लगाने की आवश्यकता होती है। यह अधिक त्वरण अथवा संवेग सदिश में तुल्यांकी अधिक परिवर्तन के तदनुरूपी होता है। इससे यह संकेत मिलता है कि संवेग सदिश में अधिक परिवर्तन के लिए अधिक बल लगाना होता है।



चित्र 4.4 संवेग का परिमाण स्थिर रहने पर भी संवेग की दिशा में परिवर्तन के लिए बल आवश्यक है । इसका अनुभव हम डोरी द्वारा किसी पत्थर को एकसमान चाल से वृत्त में घुमाकर कर सकते हैं ।

ये गुणात्मक प्रेक्षण हमें गति के द्वितीय नियम की ओर ले जाते हैं, जिसे न्यूटन ने इस प्रकार व्यक्त किया था :

किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है तथा उसी दिशा में होती है जिस दिशा में बल कार्य करता है।

इस प्रकार यदि m संहति के किसी पिण्ड पर कोई बल $\mathbf{F}$ समय अंतराल Δt तक लगाने पर उस पिण्ड के वेग में $\mathbf{v}$ से $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ का परिवर्तन हो जाता है, अर्थात् पिण्ड के प्रारंभिक संवेग $m\mathbf{v}$ में $\Delta(m\mathbf{v})$ का परिवर्तन हो जाता है। तब गति के द्वितीय नियम के अनुसार,

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad \text{अर्थात्} \quad \mathbf{F} = k\,\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

यहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है। यदि $\Delta t \to 0$, पद $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$, t के आपेक्ष $\mathbf{p}$ का अवकलज अथवा अवकल गुणांक बन जाता है, जिसे $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इस प्रकार,

$$\mathbf{F} = k\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \tag{4.2}$$

किसी स्थिर संहति m के पिण्ड के लिए

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\mathbf{v}) = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{a} \tag{4.3}$$

अर्थात्, द्वितीय नियम को इस प्रकार भी लिख सकते हैं,

$$\mathbf{F} = k\,m\,\mathbf{a} \tag{4.4}$$

जो यह दर्शाता है कि बल $\mathbf{F}$, संहति m तथा त्वरण $\mathbf{a}$ के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती होता है।

हमने बल के मात्रक की अब तक परिभाषा नहीं दी है । वास्तव में, बल के मात्रक की परिभाषा देने के लिए हम समीकरण (4.4) का उपयोग करते हैं। अतः हम k के लिए कोई भी नियत मान चुनने के लिए स्वतंत्र हैं। सरलता के लिए, हम $k = 1$ चुनते हैं। तब द्वितीय नियम हो जाता है,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{a} \tag{4.5}$$

SI मात्रकों में, एक मात्रक बल वह होता है जो 1kg के पिण्ड में $1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ का त्वरण उत्पन्न कर देता है। इस मात्रक बल को न्यूटन कहते हैं। इसका प्रतीक N है। $1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$।

इस स्थिति में हमें गति के द्वितीय नियम के कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुओं पर ध्यान देना है :

1. गति के द्वितीय नियम में $\mathbf{F} = 0$ से यह उपलक्षित होता है कि $\mathbf{a} = 0$। प्रत्यक्ष रूप से द्वितीय नियम प्रथम नियम के अनुरूप है।
2. गति का द्वितीय नियम एक सदिश नियम है। यह, वास्तव में, तीन समीकरणों के तुल्य है, सदिशों के प्रत्येक घटक के लिए एक समीकरण :

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = m a_x$$

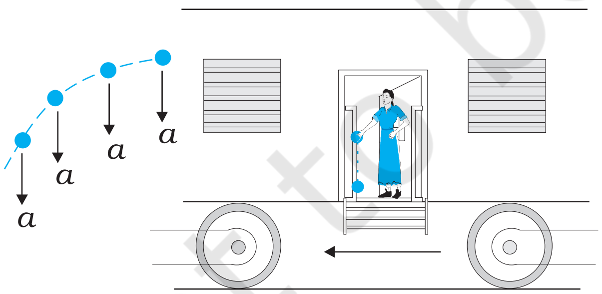
$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = ma_y$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = m\,a_z \qquad (4.6)$$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि कोई बल पिण्ड के वेग के समान्तर नहीं है, वरन् उससे कोई कोण बनाता है, तब वह केवल बल की दिशा में वेग के घटक को परिवर्तित करता है। बल के अभिलंबवत् वेग का घटक अपरिवर्तित रहता है। उदाहरण के लिए, ऊर्ध्वाधर गुरुत्वाकर्षण बल के अधीन किसी प्रक्षेप्य की गति में वेग का क्षैतिज घटक अपरिवर्तित रहता है (चित्र 4.5)।

3. समीकरण (4.5) से प्राप्त गति का द्वितीय नियम वस्तुतः, एकल बिंदु कण पर लागू होता है। नियम में **F** कण पर लगे नेट बाह्य बल तथा **a** कण के त्वरण के लिए प्रयुक्त हुआ है । तथापि इस नियम को इसी रूप में दृढ़ पिण्डों अथवा, यहाँ तक कि व्यापक रूप में कणों के निकाय पर भी लागू किया जाता है। उस अवस्था में, **F** का उल्लेख निकाय पर लगे कुल बल तथा **a** का उल्लेख समस्त निकाय के त्वरण के लिए होता है। अधिक यथार्थता से, **a** निकाय के संहति केंद्र का त्वरण है जिसके बारे में हम अध्याय 6 में विस्तार से पढ़ेंगे। **निकाय में किन्हीं भी आंतरिक बलों को F में सम्मिलित नहीं किया जाता है।**

4. गति का द्वितीय नियम एक स्थानीय संबंध है। इसका यह अर्थ है कि समय के किसी निश्चित क्षण पर समष्टि में किसी बिंदु (कण की अवस्थिति) पर लगा बल **F** उसी क्षण उसी बिंदु पर त्वरण **a** से संबंधित है। अर्थात् 'किसी कण के त्वरण का निर्धारण उसी समय उस पर लगे बल द्वारा किया जाता है, ***कण की गति के किसी भी इतिहास द्वारा नहीं (चित्र 4.5 देखें)।***



चित्र 4.5 किसी क्षण पर त्वरण का निर्धारण उसी क्षण के बल द्वारा किया जाता है । किसी त्वरित रेलगाड़ी से कोई पत्थर बाहर डालने के क्षण के तुरंत पश्चात्, यदि वायु के प्रतिरोध को नगण्य मानें तो, उस पत्थर पर कोई क्षैतिज त्वरण अथवा बल कार्यरत नहीं होता । कुछ क्षण पूर्व पत्थर पर रेलगाड़ी के त्वरण का प्रभाव अब पूर्णतया समाप्त हो जाता है।

▶ ***उदाहरण 4.2*** $90\ m\ s^{-1}$ चाल से गतिमान 0.04 kg संहति की कोई गोली लकड़ी के भारी गुटके में धँसकर 60 cm दूरी चलकर रुक जाती है । गुटके द्वारा गोली पर लगने वाला औसत अवरोधी बल क्या है ?

हल गोली का मंदन (नियत मानते हुए)

$$a = \frac{-u^2}{2s} = \frac{-90 \times 90}{2 \times 0.6}\ m\ s^{-2} = -6750\ m\ s^{-2}$$

गति के द्वितीय नियम के द्वारा, मंदन बल

$$= 0.04\ kg \quad 6750\ m\ s^{-2} = 270\ N$$

इस प्रकरण में, वास्तविक अवरोधी बल और इसीलिए, गोली का मंदन एकसमान नहीं होता। इसीलिए, उत्तर केवल औसत अवरोधी बल को व्यक्त करता है। ◀

उदाहरण 4.3 द्रव्यमान m के एक कण की गति, $y = ut + \frac{1}{2}gt^2$ से वर्णित है। उस कण पर लगने वाले बल को ज्ञात करो।

हल : हम जानते हैं

$$y = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

अब,

$$v = \frac{dy}{dt} = u + gt$$

$$\text{त्वरण,}\ a = \frac{dv}{dt} = g$$

समीकरण (4.5) से बल,

$$F = ma = mg$$

अतः दिए गए समीकरण से गुरुत्वीय त्वरण के अधीन कण की गति का वर्णन होता है तथा y गुरुत्वीय त्वरण g की दिशा में स्थान निर्देशांक है। ◀

आवेग

कभी-कभी हमारा सामना ऐसे दृष्टांतों से होता है जिनमें किसी पिण्ड पर कोई बड़ा बल, बहुत कम समय के लिए कार्यरत रहकर, उस पिण्ड के संवेग में परिमित परिवर्तन उत्पन्न करता है। उदाहरण के लिए, जब कोई गेंद किसी दीवार से टकराकर वापस परावर्तित होती है, तब दीवार द्वारा गेंद पर लगने वाला बल बहुत कम समय के लिए (जितने समय तक दोनों संपर्क में होते हैं) कार्यरत रहता है तो भी यह बल गेंद के संवेग को उत्क्रमित करने के लिए पर्याप्त होता है। प्रायः इन स्थितियों में, बल तथा समयावधि को

पृथक-पृथक सुनिश्चित करना कठिन होता है। परंतु बल तथा समय का गुणनफल, जो कि पिण्ड का संवेग परिवर्तन है, एक मापने योग्य राशि है। इस गुणनफल को **आवेग** कहते हैं :

आवेग = बल × समयावधि

= संवेग में परिवर्तन (4.7)

परिमित संवेग परिवर्तन उत्पन्न करने के लिए, कम समय के लिए कार्यरत रहने वाले बड़े बल को *आवेगी बल* कहते हैं। यद्यपि विज्ञान के इतिहास में आवेगी बलों को संकल्पनात्मक रूप से सामान्य बलों से अलग श्रेणी में रखा गया, न्यूटनी यांत्रिकी में ऐसा कोई विभेदन नहीं किया गया है। अन्य बलों की भांति आवेगी बल भी बल ही है–केवल यह बड़ा है और कम समय के लिए कार्यरत रहता है।

▶ ***उदाहरण 4.4*** कोई बल्लेबाज किसी गेंद की आरंभिक चाल जो $12\ \text{m s}^{-1}$ है, में बिना परिवर्तन किए उस पर हिट लगाकर सीधे गेंदबाज की दिशा में वापस भेज देता है। यदि गेंद की संहति 0.15 kg है, तो गेंद को दिया गया आवेग ज्ञात कीजिए। (गेंद की गति रैखिक मानिए)।

हल : संवेग परिवर्तन $= 0.15 \times 12 - (-0.15 \times 12) = 3.6\ \text{N s}$

आवेग $= 3.6\ \text{N s}$ बल्लेबाज से गेंदबाज की दिशा में

यह एक ऐसा उदाहरण है जिसमें बल्लेबाज द्वारा गेंद पर लगा बल तथा गेंद और बल्ले के बीच संपर्क का समय ज्ञात करना एक कठिन कार्य है जबकि आवेग का परिकलन तुरंत किया जा सकता है। ◀

4.6 न्यूटन का गति का तृतीय नियम

गति का द्वितीय नियम किसी पिण्ड पर लगे बाह्य बल तथा उसमें उत्पन्न त्वरण में संबंध बताता है। पिण्ड पर लगे बाह्य बल का उद्गम क्या है ? कौन साधन बाह्य बल प्रदान करता है ? न्यूटनी यांत्रिकी में इन प्रश्नों का सरल उत्तर यह है कि किसी पिण्ड पर लगने वाला बाह्य बल सदैव ही किसी अन्य पिण्ड के कारण होता है। दो पिण्डों A और B के युगल पर विचार कीजिए। मान लीजिए पिण्ड B पिण्ड A पर कोई बाह्य बल लगाता है, तब यह प्रश्न भी स्वाभाविक है : क्या पिण्ड A भी पिण्ड B पर कोई बाह्य बल लगाता है ? कुछ उदाहरणों में उत्तर स्पष्ट जान पड़ता है। यदि आप किसी कुण्डलित कमानी को अपने हाथों से दबाएँ तो वह कमानी आपके हाथों के बल से संपीडित हो जाती है। संपीडित कमानी भी प्रत्युत्तर में आपके हाथों पर बल आरोपित करती है : आप इस बल का अनुभव करते हैं। परंतु तब क्या होता है जब पिण्ड संपर्क में नहीं होते ? पृथ्वी गुरुत्वीय बल के कारण किसी पत्थर को अधोमुखी दिशा में खींचती है। क्या पत्थर पृथ्वी पर कोई बल लगाता है ? इसका उत्तर स्पष्ट नहीं है, क्योंकि हम पत्थर द्वारा पृथ्वी पर लगे बल के प्रभाव को नहीं देख सकते हैं। परंतु न्यूटन के अनुसार इस प्रश्न का उत्तर है : हाँ, पत्थर भी पृथ्वी पर परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत बल लगाता है। हमें इस बल की जानकारी नहीं हो पाती, इसका कारण यह है कि अत्यधिक भारी होने के कारण पृथ्वी की गति पर पत्थर द्वारा लगने वाले कम बल का प्रभाव नगण्य होता है।

इस प्रकार, न्यूटनी यांत्रिकी के अनुसार, प्रकृति में बल कभी भी अकेला नहीं पाया जाता। दो पिण्डों के बीच परस्पर अन्योन्य क्रिया बल है। बल सदैव युगल में पाए जाते हैं। साथ ही, दो पिण्डों के बीच परस्पर बल सदैव समान और विपरीत दिशा में होते हैं। न्यूटन ने इस धारणा को **गति के तृतीय नियम** के रूप में व्यक्त किया।

प्रत्येक क्रिया की सदैव समान एवं विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है।

न्यूटन की गति के तृतीय नियम की भाषा इतनी सुस्पष्ट और रोचक है कि यह सामान्य भाषा का अंग बन गई है। कदाचित इसी कारणवश गति के तृतीय नियम के बारे में काफी भ्रांतियाँ हैं। आइए, गति के तृतीय नियम के बारे में कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुओं पर ध्यान दें, विशेषकर *क्रिया* तथा *प्रतिक्रिया* पदों के प्रयोग के संदर्भ में।

1. गति के तृतीय नियम में पदों – क्रिया तथा प्रतिक्रिया का अर्थ 'बल' के अतिरिक्त अन्य कुछ नहीं है। एक ही भौतिक राशि के लिए विभिन्न पदों का प्रयोग कभी-कभी भ्रमित कर सकता है। तृतीय नियम को सरल तथा स्पष्ट शब्दों में इस प्रकार लिखा जाता है :

   बल सदैव युगलों में पाए जाते हैं। पिण्ड A पर B द्वारा आरोपित बल पिण्ड B पर A द्वारा आरोपित बल के समान एवं विपरीत होता है।

2. तृतीय नियम के पदों *क्रिया* तथा *प्रतिक्रिया* से यह भ्रम उत्पन्न हो सकता है कि क्रिया प्रतिक्रिया से पहले आती है, अर्थात् क्रिया कारण है तथा निहित प्रतिक्रिया उसका प्रभाव। **तृतीय नियम में ऐसा कोई कारण-प्रभाव संबंध नहीं है। *A* पर *B* द्वारा आरोपित बल तथा *B* पर *A* द्वारा आरोपित बल एक ही क्षण कार्यरत होते हैं।** इसी संकेत के आधार पर इनमें से किसी भी एक को क्रिया तथा दूसरे को प्रतिक्रिया कहा जा सकता है।

3. क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं, एक ही वस्तु पर नहीं। दो पिण्डों *A* तथा *B* के युगल पर विचार कीजिए। तृतीय नियम के अनुसार,

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \qquad (4.8)$$

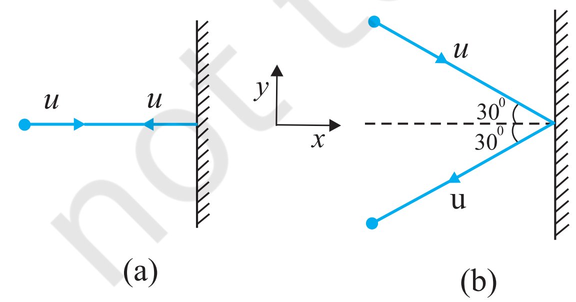
(A पर B द्वारा बल) = – (B पर A द्वारा बल)

इस प्रकार, यदि हम किसी एक पिण्ड (A अथवा B) की गति पर विचार करते हैं तो दो बलों में से केवल एक ही प्रासंगिक है। दोनों बलों का योग करके दृढ़तापूर्वक यह कहना कि नेट बल शून्य है, यह त्रुटिपूर्ण है। फिर भी, यदि आप दो पिण्डों के किसी निकाय को एक पिण्ड मानकर उस पर विचार करते हैं, तो $\mathbf{F}_{AB}$ तथा $\mathbf{F}_{BA}$ उस निकाय ($A + B$) के आंतरिक बल हैं। ये दोनों मिलकर एक शून्य बल देते हैं। इस प्रकार किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय में आंतरिक बल युगलों में निरस्त हो जाते हैं। यह एक महत्त्वपूर्ण तथ्य है जो द्वितीय नियम को किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय पर अनुप्रयोज्य होने योग्य बनाता है (देखिए अध्याय 6)।

▶ ***उदाहरण 4.5*** दो सर्वसम बिलियर्ड गेंदें किसी दृढ़ दीवार से समान चाल से, परंतु भिन्न कोणों पर, टकराती हैं तथा नीचे दर्शाए चित्र 4.6 की भांति चाल में बिना क्षय हुए परावर्तित हो जाती हैं। (i) प्रत्येक गेंद के कारण दीवार पर बल की दिशा क्या है ? तथा (ii) दीवार द्वारा दोनों गेंदों पर लगे आवेगों का अनुपात क्या है ?

हल स्वाभाविक रूप में इन प्रश्नों के उत्तर इस प्रकार होंगे– (i) यह हो सकता है कि (a) में गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत् हो जबकि (b) में गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार पर अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता है। यह उत्तर सही नहीं है। दोनों ही प्रकरणों में दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत् है।

दीवार पर लगे बल को कैसे ज्ञात करें ? इसकी गति के बारे में हमें कोई जानकारी नहीं है। इसके लिए एक युक्ति अपनाते हैं जिसमें पहले हम द्वितीय नियम का उपयोग करके दीवार के कारण गेंद पर लगे बल (अथवा आवेग) पर विचार करते हैं और तत्पश्चात् (i) का उत्तर देने के लिए तृतीय नियम का उपयोग करते हैं। मान लीजिए प्रत्येक गेंद की संहति m है तथा दीवार से टकराने से पूर्व और टकराने के पश्चात् दोनों गेंदों की चाल u है। चित्र में दर्शाए गये के अनुसार x- तथा y- अक्षों का चुनाव कीजिए, तथा प्रत्येक प्रकरण में गेंद के संवेग में परिवर्तन पर विचार कीजिए :



चित्र 4.6

प्रकरण (a)

$$(p_x)_{\text{आरंभिक}} = mu \qquad (p_y)_{\text{आरंभिक}} = 0$$

$$(p_x)_{\text{अंतिम}} = -mu \qquad (p_y)_{\text{अंतिम}} = 0$$

संवेग, आवेग सदिश में परिवर्तन होता है, अतः

आवेग का x-घटक = $-2\,mu$

आवेग का y-घटक = 0

आवेग तथा बल समान दिशा में हैं उपरोक्त चर्चा से यह स्पष्ट है कि दीवार के कारण गेंद पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत्, तथा गति की ऋणात्मक x-दिशा के अनुदिश है। न्यूटन के गति के तृतीय नियम का उपयोग करने पर गेंद के कारण दीवार पर लगा बल दीवार के अभिलंबवत्, तथा गति की धनात्मक x-दिशा के अनुदिश है। चूंकि इस समस्या में यह नहीं बताया गया है कि दीवार से टक्कर में लगा अल्प समय कितना है, अतः बल के परिमाण को सुनिश्चित नहीं किया जा सकता।

प्रकरण (b)

$$(p_x)_{\text{आरंभिक}} = m\,u\cos 30^\circ, \quad (p_y)_{\text{आरंभिक}} = -\,m\,u\sin 30^\circ$$

$$(p_x)_{\text{अंतिम}} = -\,m\,u\cos 30^\circ, \quad (p_y)_{\text{अंतिम}} = -\,m\,u\sin 30^\circ$$

ध्यान दीजिए, टकराने के पश्चात् p_x का चिह्न परिवर्तित हो जाता है, जबकि p_y का नहीं होता। अतः

आवेग का x-घटक = $-2\,mu\cos 30^\circ$

आवेग का y-घटक = 0

आवेग (तथा बल) की दिशा वही है जो (a) में थी: यह दीवार के अभिलंबवत् ऋणात्मक x- दिशा के अनुदिश है। पहले की ही भांति, न्यूटन के तृतीय नियम का उपयोग करने पर गेंद के कारण दीवार पर बल दीवार के अभिलंबवत् धनात्मक x-दिशा के अनुदिश है।

प्रकरण (a) व प्रकरण (b) में गेंद को दीवार द्वारा प्रदान किए गए आवेगों के परिमाणों का अनुपात है :

$$2\,m\,u/\left(2\,m\,u\cos 30^\circ\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.2$$ ◀

4.7 संवेग-संरक्षण

न्यूटन के गति के द्वितीय तथा तृतीय नियम एक अत्यन्त महत्त्वपूर्ण परिणाम : संवेग–संरक्षण नियम की ओर अग्रसर करते हैं। एक परिचित उदाहरण पर विचार कीजिए। किसी बंदूक से एक गोली छोड़ी जाती है। यदि बंदूक द्वारा गोली पर लगा बल $\mathbf{F}$ है, तो न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार गोली द्वारा बंदूक पर लगने वाला

बल $-\mathbf{F}$ है। दोनों बल समान समय अंतराल Δt तक कार्य करते हैं। द्वितीय नियम के अनुसार गोली का संवेग परिवर्तन $\mathbf{F}\,\Delta t$ है तथा बंदूक का संवेग परिवर्तन $-\mathbf{F}\,\Delta t$ है। चूंकि आरंभ में दोनों विराम में हैं, अतः संवेग परिवर्तन अंतिम संवेग के बराबर है। इस प्रकार यदि छोड़ने के पश्चात् गोली का संवेग, $\mathbf{p}_b$ है तथा बंदूक का प्रतिक्षेप संवेग, $\mathbf{p}_g$ है, तो $\mathbf{p}_g = -\mathbf{p}_b$ अर्थात् $\mathbf{p}_g + \mathbf{p}_b = 0$ अर्थात्, गोली बंदूक निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है।

इस प्रकार, किसी वियुक्त निकाय (अर्थात् कोई निकाय जिस पर कोई बाह्य बल नहीं लगता है।) में, निकाय के कणों के युगलों के बीच पारस्परिक बल व्यष्टि कणों में संवेग परिवर्तन कर सकते हैं, परंतु चूंकि प्रत्येक युगल के लिए पारस्परिक बल समान एवं विपरीत हैं संवेग परिवर्तन युगलों में निरस्त हो जाते हैं तथा कुल संवेग अपरिवर्तित रहता है। इस तथ्य को ***संवेग- संरक्षण नियम*** कहते हैं। इस नियम के अनुसार :

अन्योन्य क्रिया करने वाले कणों के किसी वियुक्त निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है।

संवेग-संरक्षण नियम के अनुप्रयोग का एक महत्त्वपूर्ण उदाहरण दो पिण्डों में संघट्टन है। दो पिण्डों A व B पर विचार कीजिए जिनके आरंभिक संवेग $\mathbf{p}_A$ तथा $\mathbf{p}_B$ हैं। दोनों टकराते हैं और पृथक हो जाते हैं। यदि पृथक होने के पश्चात् उनके अंतिम संवेग क्रमशः $\mathbf{P'}_A$ तथा $\mathbf{P'}_B$ हैं; तो द्वितीय नियम के द्वारा

$$\mathbf{F}_{AB}\Delta t = \mathbf{p'}_A - \mathbf{p}_A$$

तथा, $\mathbf{F}_{BA}\Delta t = \mathbf{p'}_B - \mathbf{p}_B$

(यहाँ हमने दोनों बलों के लिए समान समय अंतराल Δt लिया है, जो वह समय है जिसमें दोनों पिण्ड संपर्क में रहते हैं।)

चूंकि $\mathbf{F}_{AB} = -\,\mathbf{F}_{BA}$ तृतीय नियम द्वारा,

$$\mathbf{p'}_A - \mathbf{p}_A = -(\mathbf{p'}_B - \mathbf{p}_B)$$

अर्थात् $\mathbf{p'}_A + \mathbf{p'}_B = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)$ (4.9)

जो यह दर्शाता है कि वियुक्त निकाय (A + B) का कुल अंतिम संवेग उसके आरंभिक संवेग के बराबर है। ध्यान रहे कि, यह नियम दोनों प्रकार के संघट्टों – प्रत्यास्थ तथा अप्रत्यास्थ, पर लागू होता है। प्रत्यास्थ संघट्ट में दूसरी शर्त है कि निकाय की कुल आरंभिक गतिज ऊर्जा निकाय की कुल अंतिम गतिज ऊर्जा के बराबर होती है (देखिए अध्याय 5)।

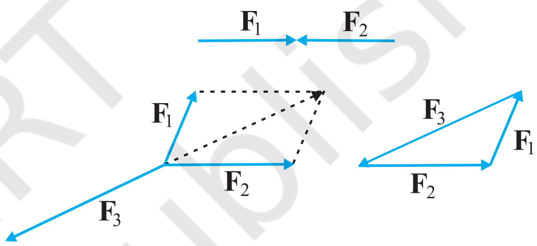
4.8 किसी कण की साम्यावस्था

यांत्रिकी में किसी कण की साम्यावस्था का उल्लेख उन स्थितियों के लिए किया जाता है जिनमें कण पर नेट बाह्य बल शून्य* हो। प्रथम नियम के अनुसार, इसका यह अर्थ है कि या तो कण विराम में है अथवा एक समान गति में है। यदि किसी कण पर दो बल $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{F}_2$ कार्यरत हैं, तो साम्यावस्था के लिए आवश्यक है कि,

$$\mathbf{F}_1 = -\,\mathbf{F}_2 \quad (4.10)$$

अर्थात् कण पर कार्यरत दोनों बल समान एवं विपरीत होने चाहिए। तीन संगामी बलों, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ तथा $\mathbf{F}_3$ के अधीन साम्यावस्था (अथवा संतुलन) के लिए इन तीनों बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \quad (4.11)$$



चित्र 4.7 संगामी बलों के अधीन संतुलन

दूसरे शब्दों में, बलों के समान्तर चतुर्भुज नियम द्वारा प्राप्त किन्हीं दो बलों, मान लीजिए $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{F}_2$, का परिणामी तीसरे बल $\mathbf{F}_3$, के समान एवं विपरीत होना चाहिए। चित्र 4.7 के अनुसार साम्यावस्था में तीनों बलों को किसी त्रिभुज की भुजाओं, जिस पर चक्रीय क्रम में सदिश तीर बने हों, द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इस परिणाम का व्यापीकरण बलों की किसी भी संख्या के लिए किया जा सकता है। आरोपित बलों $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.... $\mathbf{F}_n$ के अधीन कोई कण साम्यावस्था में होगा यदि उन बलों को n-भुजा के बंद चक्रीय बहुभुज की भुजाओं द्वारा निरूपित किया जा सके।

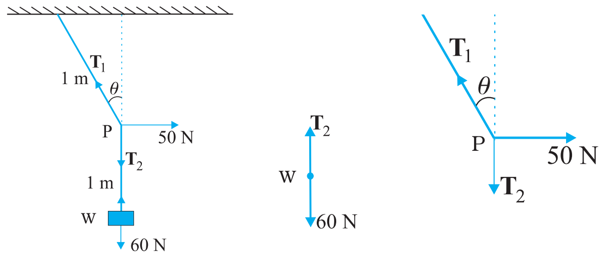
समीकरण (4-11) से

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$$
$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0 \quad (4.12)$$

* किसी पिण्ड की साम्यावस्था के लिए केवल स्थानान्तरीय साम्यावस्था (शून्य नेट बाह्य बल) ही आवश्यक नहीं है वरन् घूर्णी साम्यावस्था (शून्य नेट बाह्य बल आघूर्ण) भी आवश्यक है, यह हम अध्याय 6 में देखेंगे।

जहाँ पर F_{1x}, F_{1y} तथा F_{1z} क्रमशः $\mathbf{F}_1$ के x, y तथा z दिशा में घटक है।

▶ ***उदाहरण 4.6*** 6 kg संहति के किसी पिण्ड को छत से 2 m लंबाई की डोरी द्वारा लटकाया गया है । डोरी के मध्य-बिंदु पर चित्र 4.8 में दर्शाए अनुसार क्षैतिज दिशा में 50 N बल लगाया जाता है । साम्यावस्था में डोरी ऊर्ध्वाधर से कितना कोण बनाती है ? (g= 10 m s^{-2} लीजिए)। डोरी की संहति को नगण्य मानिए ।



चित्र 4.8

हल चित्र 4.8(b) तथा 4.8(c) बल निर्देशक आरेख कहलाते हैं। चित्र 4.8(b) भार W का बल निर्देशक आरेख है तथा 4.8(c) बिन्दु P का बल निर्देशक आरेख है। सर्वप्रथम भार W की साम्यावस्था पर विचार कीजिए। स्पष्ट है, $T_2 = 6\ 10 = 60$ N। अब तीन बलों – तनाव T_1 तथा T_2, तथा क्षैतिज बल 50 N की क्रियाओं के अधीन संहति बिंदु P की साम्यावस्था पर विचार कीजिए। परिणामी बल के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों को पृथक-पृथक शून्य होना चाहिए:

$$T_1 \cos\theta = T_2 = 60 \text{ N}$$

$$T_1 \sin\theta = 50 \text{ N}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{5}{6} \text{ अथवा } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) = 40^\circ$$

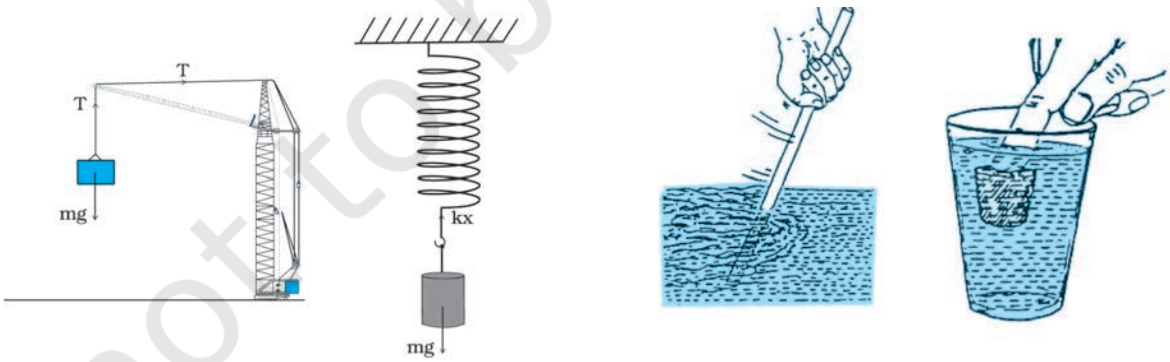
ध्यान दीजिए, उत्तर न तो डोरी (जिसका द्रव्यमान नगण्य माना है) की लंबाई पर निर्भर करता है और न ही उस बिंदु की स्थिति पर निर्भर करता है जिस पर क्षैतिज बल लगाया गया है । ◀

4.9 यांत्रिकी में सामान्य बल

यांत्रिकी में हमारा सामना कई प्रकार के बलों से होता है। वास्तव में, गुरुत्वाकर्षण बल सर्वव्यापक है। पृथ्वी पर स्थित सभी वस्तुएँ पृथ्वी के गुरुत्व बल का अनुभव करती हैं। गुरुत्वाकर्षण बल आकाशीय पिण्डों की गतियों को नियंत्रित करता है। गुरुत्वाकर्षण बल किसी दूरी पर बिना मध्यवर्ती माध्यम के कार्य कर सकता है।

यांत्रिकी में सामान्यतः आने वाले सभी बल संपर्क बल* हैं। जैसा कि नाम से संकेत मिलता है, किसी पिण्ड पर संपर्क बल किसी अन्य पिण्ड ठोस अथवा तरल के संपर्क द्वारा उत्पन्न होता है। जब कई पिण्ड संपर्क में होते हैं, (उदाहरणार्थ, मेज पर रखी कोई पुस्तक, छड़ों, कब्जों तथा अन्य प्रकार के आधारों से संबद्ध दृढ़ पिण्डों का कोई निकाय), तब वहाँ तृतीय नियम को संतुष्ट करने वाले (पिण्डों के प्रत्येक युगल के लिए) पारस्परिक संपर्क बल होते हैं। संपर्क-पृष्ठों के अभिलंबवत् संपर्क बल के घटक को अभिलंब बल (अथवा अभिलंब प्रतिक्रिया) कहते हैं। संपर्क-पृष्ठों के समान्तर घटक को घर्षण बल कहते हैं। संपर्क बल तब भी उत्पन्न होते हैं जब ठोस तरलों के संपर्क में आते हैं। उदाहरण के लिए, जब किसी ठोस को किसी तरल में डुबाते हैं, तो एक उपरिमुखी बल (उत्प्लावन बल) होता है जो उस ठोस द्वारा विस्थापित तरल के भार के बराबर होता है। श्यान बल, वायु-प्रतिरोध, आदि भी संपर्क बलों के उदाहरण हैं (चित्र 4.9)।

दो सामान्य बल कमानी बल तथा डोरी में तनाव हैं। जब किसी कमानी को किसी बाह्य बल द्वारा संपीडित अथवा विस्तारित किया जाता है, तब एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है। यह बल प्रायः संपीडन अथवा दैर्घ्यवृद्धि के अनुक्रमानुपाती होता है (छोटे



चित्र 4.9 यांत्रिकी में संपर्क बलों के कुछ उदाहरण ।

* सुगमता के लिए यहाँ हम आवेशित तथा चुंबकीय पिण्डों पर विचार नहीं कर रहे हैं । इनके लिए, गुरुत्वाकर्षण के अतिरिक्त, यहाँ वैद्युत तथा चुंबकीय असंपर्क बल हैं ।

विस्थापनों के लिए)। कमानी बल F को, $F = -kx$ द्वारा व्यक्त किया जाता है, यहाँ x विस्थापन है तथा k को कमानी-स्थिरांक या बल-स्थिरांक कहते हैं। यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि बल अतानित अवस्था से विस्थापन के विपरीत है। किसी अवितान्य डोरी के लिए, बल नियतांक बहुत अधिक होता है। किसी डोरी के प्रत्यानयन बल को तनाव कहते हैं। परंपरा के अनुसार समस्त डोरी के अनुदिश एक समान तनाव T मान लेते हैं। नगण्य संहति की डोरी के लिए, डोरी के प्रत्येक भाग पर समान तनाव मानने की परंपरा सही है।

प्रकृति में केवल चार मूल बल हैं। इनमें दुर्बल तथा प्रबल बल ऐसे प्रभाव क्षेत्र में प्रकट होते हैं, जिनका यहां हमसे संबंध नहीं है। यांत्रिकी के संदर्भ में केवल गुरुत्वाकर्षण तथा वैद्युत बल ही प्रासंगित होते हैं। यांत्रिकी के विभिन्न संपर्क बल जिनका हमने अभी वर्णन किया है, मूल रूप से वैद्युत बलों से ही उत्पन्न होते हैं। यह बात आश्चर्यजनक प्रतीत हो सकती है क्योंकि यांत्रिकी में हम अनावेशित तथा अचुंबकीय पिण्डों की चर्चा कर रहे हैं। परंतु सूक्ष्म स्तर पर, सभी पिण्ड आवेशित अवयवों (नाभिकों तथा इलेक्ट्रॉनों) से मिलकर बने हैं तथा आण्विक संघट्टों प्रतिघातों तथा पिण्डों की प्रत्यास्थता आदि के कारण उत्पन्न विभिन्न संपर्क बलों की खोजबीन से ज्ञात होता है कि अंततः ये विभिन्न पिण्डों के आवेशित अवयवों के बीच वैद्युत बल ही हैं। इन बलों की विस्तृत सूक्ष्म उत्पत्ति के विषय में जानकारी जटिल है तथा स्थूल स्तर पर यांत्रिकी की समस्याओं को हल करने की दृष्टि से उपयोगी नहीं है । यही कारण है कि उन्हें विभिन्न प्रकार के बलों के रूप माना जाता है तथा उनके अभिलाक्षणिक गुणों का आनुभविक निर्धारण किया जाता है।

4.9.1 घर्षण

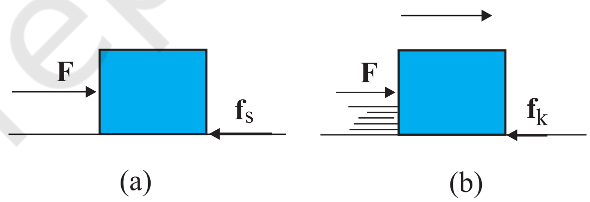
आइए, फिर से क्षैतिज मेज पर रखे m संहति के पिण्ड वाले उदाहरण पर विचार करें। गुरुत्व बल (mg) को मेज का अभिलंब बल (N) निरस्त कर देता है। अब मानिए कि पिण्ड पर कोई बाह्य बल F क्षैतिजतः आरोपित किया जाता है । अनुभव से हमें यह ज्ञात है कि परिमाण में छोटा बल आरोपित करने पर पिण्ड को गतिशील करने में अपर्याप्त हो सकता है। परंतु यदि आरोपित बल ही पिण्ड पर लगा एक मात्र बाह्य बल है, तो यह बल परिमाण में चाहे कितना भी छोटा क्यों न हो, पिण्ड को F/m त्वरण से गतिशील होना चाहिए। स्पष्ट है, कि अगर पिण्ड विराम में है तो पिण्ड पर कोई अन्य बाह्य बल क्षैतिज दिशा में कार्य करने लगा है, जो अरोपित बल F का विरोध करता है, फलस्वरूप पिण्ड पर नेट बल शून्य हो जाता है। यह विरोधी बल f_s, जो मेज के संपर्क में पिण्ड के पृष्ठ के समान्तर लगता है, घषर्ण बल अथवा केवल घर्षण कहलाता है (चित्र 4.10(a))। यहाँ पादाक्षर s को स्थैतिक घर्षण के लिए प्रयोग किया गया है, ताकि हम इसकी गतिज घर्षण f_k जिसके विषय में बाद में विचार करेंगे (चित्र 4.10(b)), से भिन्न पहचान कर सकें। ध्यान दीजिए, स्थैतिक घर्षण का अपना कोई आस्तित्व नहीं होता। जब तक कोई बाह्य बल आरोपित नहीं होता, तब तक स्थैतिक घर्षण भी नहीं होता । जिस क्षण कोई बल आरोपित होता है, उसी क्षण घर्षण बल भी लगने लगता है। पिंड को विराम में रखते हुए जब आरोपित बल F बढ़ता है, आरोपित बल के समान व विपरीत दिशा में रहते हुए f_s भी एक सीमा तक बढ़ता है। अतः इसे **स्थैतिक** घर्षण कहते हैं। स्थैतिक घर्षण **समुपस्थित गति** का विरोध करता है । समुपस्थित गति का तात्पर्य ऐसी गति से है जो तभी होगी जब (परंतु वास्तव में होती नहीं) किसी आरोपित बल के अंतर्गत घर्षण अनुपस्थित हो।

हम अनुभव से यह जानते हैं कि, जैसे आरोपित बल एक निश्चित सीमा से बढ़ता है, तो पिण्ड गति आरंभ कर देता है। प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि स्थैतिक घर्षण का सीमान्त मान $(f_s)_{\text{अधिकतम}}$ संपर्क पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता तथा अभिलंब बल (N) के साथ लगभग इस प्रकार परिवर्तित होता है :

$$(f_s)_{\text{अधिकतम}} = \mu_s N \qquad (4.13)$$

यहाँ μ_s आनुपातिकता स्थिरांक है, जो केवल संपर्क-पृष्ठों के युगल की प्रकृति पर ही निर्भर करता है। इस स्थिरांक μ_s को स्थैतिक घर्षण गुणांक कहते हैं। स्थैतिक घर्षण नियम को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$f_s \le \mu_s N \qquad (4.14)$$



चित्र 4.10 स्थैतिक तथा सर्पी घर्षण: (a) स्थैतिक घर्षण पिण्ड की समुपस्थित गति का विरोध करता है । जब बाह्य बल स्थैतिक घर्षण की अधिकतम सीमा से बढ़ जाता है, तो गति आरंभ होती है । (b) एक बार जब पिण्ड गतिशील हो जाता है तो उस पर सर्पी अथवा गतिज घर्षण कार्य करने लगता है जो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति का विरोध करता है । गतिज घर्षण प्रायः स्थैतिक घर्षण के अधिकतम मान से कम होता है ।

यदि आरोपित बल F का मान $(f_s)_{\text{अधिकतम}}$ से अधिक हो जाता है, तो पिण्ड पृष्ठ पर सरकना आरंभ कर देता है। प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि जब आपेक्ष गति आरंभ हो जाती है, तब घर्षण बल, अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल $(f_s)_{\text{अधिकतम}}$ से कम हो जाता है। वह घर्षण बल, जो दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्ष गति

का विरोध करता है, **गतिज** अथवा **सर्पी घर्षण** कहलाता है और इसे f_k द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। स्थैतिक घर्षण की भांति गतिज घर्षण भी संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता। साथ ही, यह आपेक्ष गति के वेग पर भी लगभग निर्भर नहीं करता। यह एक नियम, जो स्थैतिक घर्षण के लिए नियम के समरूप है, को संतुष्ट करता है :

$$f_k = \mu_k N \qquad (4.15)$$

यहाँ μ_k, गतिज घर्षण गुणांक हैं जो केवल संपर्क पृष्ठों के युगल की प्रकृति पर निर्भर करता है। जैसा कि ऊपर वर्णन किया जा चुका है, प्रयोग यह दर्शाते हैं कि μ_k, μ_s से कम होता है। जब आपेक्ष गति आरंभ हो जाती है तो, द्वितीय नियम के अनुसार, गतिमान पिण्ड का त्वरण $(F-f_k)/m$ होता है। एकसमान वेग से गतिमान पिण्ड के लिए, $F = f_k$। यदि पिण्ड से आरोपित बल को हटा लें तो उसका त्वरण $-f_k/m$ होता है और अंतिमत: पिण्ड रुक जाता है।

ऊपर वर्णन किए गए घर्षण के नियमों को मूल नियमों की उस श्रेणी में नहीं माना जाता जिसमें गुरुत्वाकर्षण, वैद्युत तथा चुंबकीय बलों को माना जाता है। ये आनुभविक संबंध हैं, जो केवल सीमित प्रभाव क्षेत्रों में ही सन्निकटत: सही हैं। फिर भी ये नियम यांत्रिकी में व्यावहारिक परिकलनों में बहुत लाभप्रद हैं।

इस प्रकार, जब दो पिण्ड संपर्क में होते हैं तब प्रत्येक पिण्ड अन्य पिण्ड के द्वारा संपर्क बल का अनुभव करता है। परिभाषा के अनुसार, घर्षण बल संपर्क बल का संपर्क पृष्ठों के समान्तर घटक होता है, जो दो पृष्ठों के बीच समुपस्थित अथवा वास्तविक आपेक्ष गति का विरोध करता है। ध्यान दीजिए, घर्षण बल गति का नहीं वरन् **आपेक्ष गति** का विरोध करता है। त्वरित गति से गतिमान रेलगाड़ी के किसी डिब्बे में रखे बॉक्स पर विचार कीजिए। यदि बॉक्स रेलगाड़ी के आपेक्ष स्थिर है, तो वास्तव में वह रेलगाड़ी के साथ त्वरित हो रहा है। वह कौन-सा बल है जो बॉक्स को त्वरित कर रहा है ? स्पष्ट है कि क्षैतिज दिशा में एक ही कल्पनीय बल है, और वह है घर्षण बल। यदि कोई घर्षण नहीं है तो रेलगाड़ी के डिब्बे का फर्श तो आगे की ओर सरकेगा तथा जड़त्व के कारण बॉक्स अपनी आरंभिक स्थिति पर ही रहेगा (तथा रेलगाड़ी के डिब्बे की पिछली दीवार से टकराएगा)। इस समुपस्थित आपेक्ष गति का स्थैतिक घर्षण f_s द्वारा विरोध किया जाता है। यहाँ स्थैतिक घर्षण, बॉक्स को रेलगाड़ी के आपेक्ष स्थित रखते हुए, रेलगाड़ी के समान त्वरण प्रदान करता है।

उदाहरण 4.7 कोई बॉक्स रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखा है। यदि बॉक्स तथा रेलगाड़ी के फर्श के बीच स्थैतिक, घर्षण गुणांक 0.15 है, तो रेलगाड़ी का वह अधिकतम त्वरण ज्ञात कीजिए जो बॉक्स को रेलगाड़ी के फर्श पर स्थिर रखने के लिए आवश्यक है।

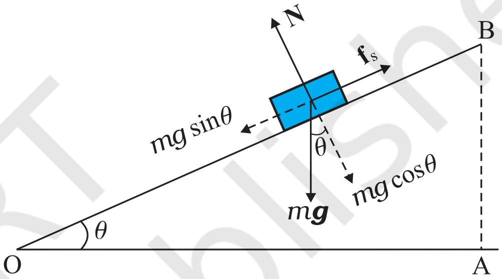
हल चूंकि बॉक्स में त्वरण स्थैतिक घर्षण के कारण ही है, अत:

$$ma = f_s \le \mu_s N = \mu_s\, mg$$

अर्थात् $a \le \mu_s g$

$$\therefore a_{\text{अधिकतम}} = \mu_s g = 0.15 \times 10\,\text{m s}^{-2} = 1.5\,\text{m s}^{-2}$$ ◂

उदाहरण 4.8 4 kg का कोई गुटका एक क्षैतिज समतल पर रखा है (चित्र 4.11)। समतल को धीरे-धीरे तब तक आनत किया जाता है जब तक क्षैतिज से किसी कोण $\theta = 15°$ पर वह गुटका सरकना आरंभ नहीं कर देता। पृष्ठ और गुटके के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक क्या है ?



चित्र 4.11

हल आनत समतल पर विरामावस्था में रखे m संहति के गुटके पर कार्यरत बल है (*i*) गुटके का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर, (*ii*) समतल द्वारा गुटके पर लगाया गया अभिलंब बल N, तथा (*iii*) समुपस्थित गति का विरोध करने वाला स्थैतिक घर्षण बल f_s। गुटके की साम्यावस्था में इन बलों का परिणामी शून्य बल होना चाहिए। भार mg को चित्र में दर्शाए अनुसार दो दिशाओं में अपघटित करने पर

$$mg\sin\theta = f_s \quad mg\cos\theta = N$$

जैसे-जैसे θ बढ़ता है, स्वसमायोजी घर्षण बल f_s तब तक बढ़ता है जब तक, $\theta = \theta_{\text{अधिकतम}}$ पर यह अपना अधिकतम मान प्राप्त नहीं कर लेता, $(f_s)_{\text{अधिकतम}} = \mu_s N$, जहाँ μ_s गुटके तथा समतल के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक है।

अत:

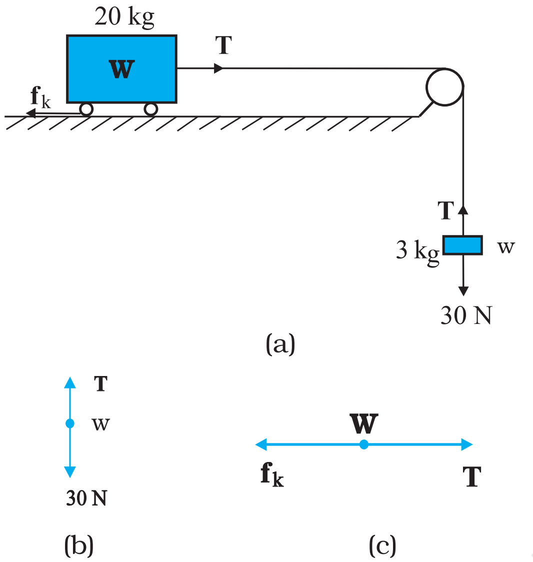
$$\tan\theta_{\text{अधिकतम}} = \mu_s \text{ अथवा } \theta_{\text{अधिकतम}} = \tan^{-1}\mu_s$$

जब θ का मान $\theta_{\text{अधिकतम}}$ से केवल कुछ ही अधिक होता है, तो गुटके पर एक लघु नेट बल लगता है और गुटका सरकना आरंभ कर देता है। ध्यान दीजिए, $\theta_{\text{अधिकतम}}$ केवल μ_s पर ही निर्भर करता है, यह गुटके की संहति पर निर्भर नहीं करता।

$\theta_{\text{अधिकतम}} = 15°$ के लिए,

$$\mu_s = \tan 15° = 0.27$$ ◂

▶ ***उदाहरण 4.9*** चित्र 4.12(a) में दर्शाए ब्लॉक-ट्रॉली निकाय का त्वरण क्या है, यदि ट्रॉली और पृष्ठ के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0.04 है? डोरी में तनाव क्या है ? ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$ लीजिए), डोरी की संहति नगण्य मानिए ।



चित्र 4.12

हल : चूंकि डोरी की लंबाई नियत है तथा घिरनी चिकनी है, 3 kg के ब्लॉक तथा 20 kg की ट्रॉली दोनों के त्वरणों के परिमाण समान हैं। ब्लॉक की गति पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर (चित्र 4.12(b)),

$$30 - T = 3a$$

ट्रॉली की गति पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर (चित्र 4.12(c)),

$$T - f_k = 20a$$

अब $f_k = \mu_k N$, जहाँ μ_k गतिज घर्षण गुणांक है तथा N अभिलंब बल है । यहाँ $\mu_k = 0.04$, तथा $N = 20 \times 10 = 200$ N

इस प्रकार, ट्रॉली की गति के लिए समीकरण

$T - 0.04 \times 200 = 20a$ अथवा $T - 8 = 20a$

इस समीकरणों से हमें प्राप्त होता है,

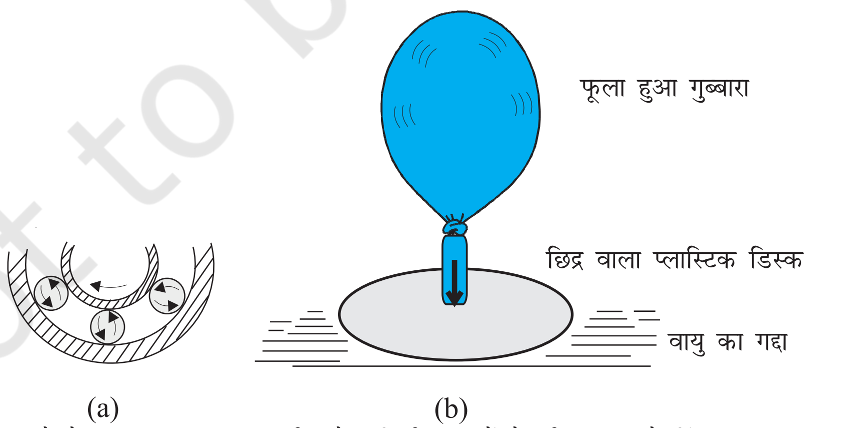
$$a = \frac{22}{23} \text{ m s}^{-2} = 0.96 \text{ m s}^{-2}$$

तथा $T = 27.1$ N ◀

लोटनिक घर्षण

सिद्धांत रूप से क्षैतिज समतल पर एक वलय (रिंग) के समान वस्तु अथवा गोल गेंद जैसे पिण्ड जो बिना सरके केवल लोटन कर रहा (लुढ़क) है, पर किसी भी प्रकार का कोई घर्षण बल नहीं लगेगा । लोटनिक गति करते किसी पिण्ड का हर क्षण समतल तथा पिण्ड के बीच केवल एक ही संपर्क बिंदु होता है तथा यदि कोई सरकन नहीं है तो इस तात्क्षणिक संपर्क बिंदु की समतल के आपेक्ष कोई गति नहीं होती। इस आदर्श स्थिति में गतिज अथवा स्थैतिक घर्षण शून्य होता है तथा पिण्ड को एकसमान वेग से निरंतर लोटनिक गति करते रहना चाहिए। हम जानते हैं कि व्यवहार में ऐसा नहीं होगा, तथा गति में कुछ न कुछ अवरोध (लोटनिक घर्षण) अवश्य रहता है, अर्थात्, पिण्ड को निरंतर लोटनिक गति करते रहने के लिए उस पर कुछ बल लगाने की आवश्यकता होती है। समान भार के पिण्ड के लिए लोटनिक घर्षण सदैव ही सर्पी अथवा स्थैतिक घर्षण की तुलना में बहुत कम (यहाँ तक कि परिमाण की 2 अथवा 3 कोटि तक) होता है। यही कारण है कि मानव सभ्यता के इतिहास में भारी बोझों के परिवहन के लिए पहिए की खोज एक बड़ा मील का पत्थर माना गया है।

लोटनिक घर्षण का उद्‌गम जटिल है यद्यपि यह स्थैतिक तथा सर्पी घर्षण के उद्‌गम से कुछ भिन्न है। लोटनिक गति के समय



चित्र 4.13 *घर्षण को घटाने के कुछ उपाय । (a) मशीन के गतिशील भागों के बीच बॉल-बेयरिंग लगाकर, (b) आपेक्षिक गति करने वाले पृष्ठों के बीच वायु का संपीडित गद्दा ।*

संपर्क पृष्ठों में क्षणमात्र के लिए विरूपण होता है, तथा इसके फलस्वरूप पिण्ड का कुछ परिमित क्षेत्रफल (कोई बिंदु नहीं), लोटनिक गति के समय पृष्ठ के संपर्क में होता है। इसका नेट प्रभाव यह होता है कि संपर्क बल का एक घटक पृष्ठ के समान्तर प्रकट होता है जो गति का अवरोध करता है।

हम प्राय: घर्षण को एक अवांछनीय बल मानते हैं। बहुत सी स्थितियों में, जैसे किसी मशीन, जिसमें विभिन्न कल पुर्जे गति करते हों, में घर्षण की ऋणात्मक भूमिका होती है। यह आपेक्ष गतियों का विरोध करता है जिसके फलस्वरूप ऊष्मा, आदि के रूप में ऊर्जा-क्षय होता है। मशीनों में स्नेहक गतिज घर्षण को कम करने का एक साधन होता है। घर्षण को कम करने का एक अन्य उपाय मशीन के दो गतिशील भागों के बीच, बॉल-बेयरिंग लगाना है चित्र 4.13(a)। (क्योंकि दो संपर्क पृष्ठों तथा बाल बेयरिगों के बीच लोटनिक घर्षण बहुत कम होता है, अत: ऊर्जा-क्षय घट जाता है । सापेक्ष गति करते दो ठोस पृष्ठों के बीच वायु की पतली परत बनाए रखकर भी प्रभावी ढंग से घर्षण को घटाया जा सकता है (चित्र 4.13(b))।

तथापि, बहुत-सी व्यावहारिक स्थितियों में, घर्षण अत्यन्त आवश्यक होता है । गतिज घर्षण में ऊर्जा-क्षय होता है, फिर भी आपेक्षिक गति को शीघ्र समाप्त करने में इसकी महत्त्वपूर्ण भूमिका है। मशीनों तथा यंत्रों में ब्रेक की भांति इसका उपयोग किया जाता है। इसी प्रकार स्थैतिक घर्षण भी हमारे दैनिक जीवन में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। हम घर्षण के कारण ही फर्श पर चल पाते हैं । अत्यधिक फिसलन वाली सड़क पर कार को चला पाना असंभव होता है। किसी साधारण सड़क पर, टायरों और सड़क के बीच घर्षण पहिए की घूर्णी गति को लोटनिक गति में रूपांतरित करके कार को त्वरित करने के लिए आवश्यक बाह्य बल प्रदान करता है ।

4.10 वर्तुल (वृतीय) गति

हमने अध्याय 3 में यह देखा कि R त्रिज्या के किसी वृत्त में एकसमान चाल v से गतिमान किसी पिण्ड का त्वरण v^2/R वृत्त के केंद्र की ओर निर्दिष्ट होता है। द्वितीय नियम के अनुसार इस त्वरण को प्रदान करने वाला बल है :

$$f_c = \frac{mv^2}{R} \qquad (4.16)$$

जहाँ m पिण्ड की संहति है। केंद्र की ओर निर्दिष्ट इस बल को अभिकेंद्र बल कहते हैं। डोरी की सहायता से वृत्त में घूर्णन करने वाले पत्थर को डोरी में तनाव अभिकेंद्र बल प्रदान करता है। सूर्य के चारों ओर किसी ग्रह की गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल सूर्य के कारण उस ग्रह पर लगे गुरुत्वाकर्षण से मिलता है। किसी क्षैतिज सड़क पर कार को वृत्तीय मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल घर्षण बल प्रदान करता है ।

किसी सपाट सड़क तथा किसी ढालू सड़क पर कार की वर्तुल गति, गति के नियमों के रोचक उदाहरण हैं।

समतल सड़क पर कार की गति–

कार पर तीन बल आरोपित हैं [चित्र 4.14(a)]

(i) कार का भार, mg

(ii) अभिलम्ब प्रतिक्रिया, N

(iii) घर्षण बल, f

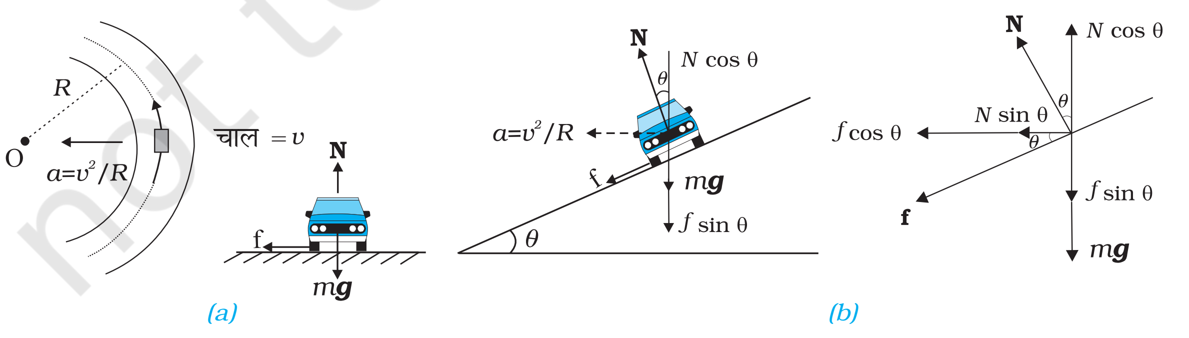
क्योंकि यहाँ ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई त्वरण नहीं है, अत:

$$N - mg = 0$$
$$N = mg \qquad (4.17)$$

वर्तुल गति के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल सड़क के पृष्ठ के अनुदिश है । यह बल कार के टायरों तथा सड़क के पृष्ठ के बीच पृष्ठ के अनुदिश संपर्क बल के घटक, जो परिभाषा के अनुसार घर्षण बल ही है, द्वारा प्रदान किया जाना चाहिए। ध्यान दीजिए, यहाँ स्थैतिक घर्षण ही अभिकेंद्र त्वरण प्रदान करता है। स्थैतिक घर्षण, घर्षण की अनुपस्थिति में वृत्त से दूर जाती गतिमान कार की समुपस्थित गति का विरोध करता है।

समीकरण (4.14) तथा (4.16) से हमें प्राप्त होता है

$$f \le \mu_s N = \frac{mv^2}{R}$$



चित्र 4.14 कार की (a) समतल सड़क, तथा (b) ढालू सड़क पर वर्तुल गति ।

$$v^2 \le \frac{\mu_s RN}{m} = \mu_s Rg \qquad [\;N = mg]$$

यह संबंध कार की संहति पर निर्भर नहीं करता। इससे यह प्रदर्शित होता है कि μ_s तथा R के किसी दिए हुए मान के लिए कार की वर्तुल गति की कोई संभावित अधिकतम चाल होती है, जिसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$v_{\text{अधिकतम}} = \sqrt{\mu_s Rg} \qquad (4.18)$$

ढालू सड़क पर कार की गति

यदि सड़क ढालू है (चित्र 4.14b), तो हम कार की वर्तुल गति में घर्षण के योगदान को घटा सकते हैं। क्योंकि यहाँ फिर ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई त्वरण नहीं है, इसलिए नेट बल शून्य होगा। अतः

$$N \cos\theta = mg + f\sin\theta \qquad (4.19a)$$

N तथा f के घटकों द्वारा अभिकेंद्र बल प्राप्त किया जाता है :

$$N\sin\theta + f\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \qquad (4.19b)$$

यहाँ, पहले कि भाँति, $f \le \mu_s N$

$v_{\text{अधिकतम}}$ के लिए हम $f = \mu_s N$ लेते हैं।

समीकरण (4.19a) तथा (4.19b) को लिखा जा सकता है

$$N\cos\theta = mg + \mu_s N\sin\theta \qquad (4.20a)$$

$$N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = mv^2/R \qquad (4.20b)$$

अतः समीकरण (4.20a) से $N = \dfrac{mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$

समीकरण (4.20b) में N का मान रखने पर

$$\frac{mg(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} = \frac{mv^2_{\text{अधिकतम}}}{R}$$

$$\text{या } v_{\text{अधिकतम}} = \left(Rg\frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s\tan\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.21)$$

समीकरण (4.18) से तुलना करने पर हम देखते हैं कि ढालू सड़क पर कार की अधिकतम चाल समतल सड़क पर कार की अधिकतम संभव चाल से अधिक है। समीकरण (4.21) में $\mu_s = 0$ के लिए,

$$v_0 = (Rg\tan\theta)^{1/2} \qquad (4.22)$$

इस चाल पर आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए घर्षण बल की कोई आवश्यकता नहीं होती। इस चाल से ढालू सड़क पर कार चलाने पर कार के टायरों की कम घिसाई होती है। इसी समीकरण से यह भी ज्ञात होता है कि $v < v_0$ के लिए घर्षण बल उपरिमुखी होगा तथा किसी कार को स्थिर स्थिति में केवल तभी पार्क किया जा सकता है जब $\tan\theta \le \mu_s$ हो।

उदाहरण 4.10 18 km/h की चाल से समतल सड़क पर गतिमान कोई साइकिल सवार बिना चाल को कम किए 3 m त्रिज्या का तीव्र वर्तुल मोड़ लेता है। टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.1 है। क्या साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाएगा ?

हल सपाट सड़क पर अकेला घर्षण बल ही साइकिल सवार को बिना फिसले वर्तुल मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान कर सकता है। यदि चाल बहुत अधिक है, तथा/अथवा मोड़ अत्यधिक तीव्र है (अर्थात् त्रिज्या बहुत कम है), तब घर्षण बल इन स्थितियों में आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त नहीं होता और साइकिल सवार मोड़ लेते समय फिसल कर गिर जाता है। साइकिल सवार के न फिसलने की शर्त समीकरण (4.18) द्वारा इस प्रकार है :

$$v^2 \le \mu_s Rg$$

अब, यहाँ इस प्रश्न में $R = 3$ m, $g = 9.8$ m s^{-2} तथा $\mu_s = 0.1$ अर्थात् $\mu_s Rg = 2.94$ m^{2}s^{-2}; तथा $v = 18$ km/h $= 5$ m s^{-1}; अर्थात् $v^2 = 25$ m^{2}s^{-2} अर्थात्, शर्त $v^2 \le \mu_s Rg$ का पालन नहीं होता। अतः, साइकिल सवार तीव्र वर्तुल मोड़ लेते समय फिसलकर गिरेगा। ◀

उदाहरण 4.11 300 m त्रिज्या वाले किसी वृत्ताकार दौड़ के मैदान का ढाल 15° है। यदि मैदान और रेसकार के पहियों के बीच घर्षण गुणांक 0.2 है, तो (a) टायरों को घिसने से बचाने के लिए रेसकार की अनुकूलतम चाल, तथा (b) फिसलने से बचने के लिए अधिकतम अनुमेय चाल क्या है ?

हल ढालू मैदान पर बिना फिसले गतिशील रेसकार को वर्तुल मोड़ लेने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने में घर्षण बल तथा अभिलंब बल के क्षैतिज घटक का योगदान होता है। रेसकार की अनुकूलतम चाल पर गति के लिए अभिलंब बल का घटक ही आवश्यक अभिकेंद्र बल प्रदान करने के लिए पर्याप्त होता है तथा घर्षण बल की कोई आवश्यकता नहीं होती। समीकरण (4.22) द्वारा रेसकार की अनुकूलतम चाल v_0 को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$\upsilon_0 = (Rg \tan \theta)^{1/2}$$

यहां $R = 300$ m, $\theta = 15^0$, $g = 9.8$ m s^{-2}; अत:

$$\upsilon_0 = 28.1 \text{ m s}^{-1}$$

समीकरण (4.21) द्वारा रेसकार की अधिकतम अनुमेय चाल को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$\upsilon_{\text{अधिकतम}} = \left(Rg \frac{\mu_s + \tan\theta}{1 - \mu_s \tan\theta} \right)^{\frac{1}{2}} = 38.1 \text{ m s}^{-1}$$ ◀

4.11 यांत्रिकी में समस्याओं को हल करना

गति के जिन तीन नियमों के विषय में आपने इस अध्याय में अध्ययन किया है वे यांत्रिकी की आधारशिला हैं। अब आप यांत्रिकी की विविध प्रकार की समस्याओं को हल करने में सक्षम हैं। आमतौर पर यांत्रिकी की किसी प्ररूपी समस्या में बलों की क्रिया के अधीन केवल एक पिण्ड का ही समावेश नहीं होता। अधिकांश प्रकरणों में हम विभिन्न पिण्डों के ऐसे संयोजन पर विचार करते हैं जिनमें पिण्ड परस्पर एक दूसरे पर बल लगाते हैं। इसके अतिरिक्त संयोजन का प्रत्येक पिण्ड गुरुत्व बल का भी अनुभव करता है। इस प्रकार की किसी समस्या को हल करने का प्रयास करते समय हमें एक स्पष्ट तथ्य याद रखना परमावश्यक है कि समस्या का हल करने के लिए उस संयोजन के किसी भी भाग को चुना जा सकता है तथा उस भाग पर गति के नियमों को इस शर्त के साथ लागू किया जा सकता है कि चुने गए भाग पर संयोजन के शेष भागों द्वारा आरोपित सभी बलों को सम्मिलित करना सुनिश्चित कर लिया गया है। संयोजन के चुने गए भाग को हम निकाय कह सकते हैं तथा संयोजन के शेष भाग (निकाय पर आरोपित बलों के अन्य साधनों को सम्मिलित करते हुए) को वातावरण कह सकते हैं। इस विधि को वास्तव में हमने पहले भी कई उदाहरणों में अपनाया है। यांत्रिकी की किसी प्ररूपी समस्या को सुव्यवस्थित ढंग से हल करने के लिए हमें निम्नलिखित चरणों को अपनाना चाहिए :

(i) पिण्डों के संयोजन के विभिन्न भागों – संबंधों, टेकों, आदि को दर्शाने वाला संक्षिप्त योजनाबद्ध आरेख खींचिए।

(ii) संयोजन के किसी सुविधाजनक भाग को निकाय के रूप में चुनिए।

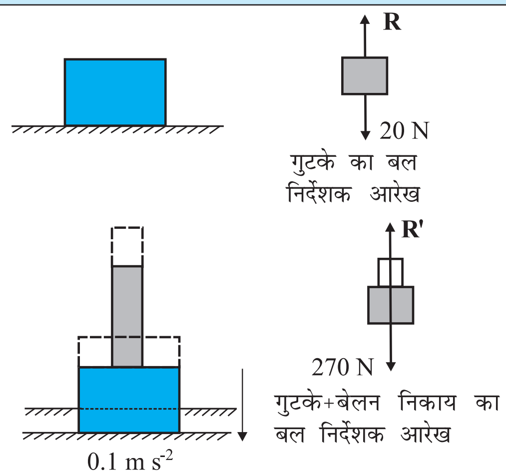
(iii) एक पृथक आरेख खींचिए जिसमें केवल निकाय तथा पिण्डों के संयोजन के शेष भागों द्वारा निकाय पर आरोपित सभी बलों को सम्मिलित करके दर्शाया गया हो। निकाय पर सभी अन्य साधनों द्वारा आरोपित बलों को भी सम्मिलित कीजिए। निकाय द्वारा वातावरण पर आरोपित बलों को इसमें सम्मिलित नहीं कीजिए। इस प्रकार के आरेख को **"बल-निर्देशक आरेख"** कहते हैं। (ध्यान दीजिए, इसका यह अर्थ नहीं है कि विचाराधीन निकाय पर कोई नेट बल नहीं है।)

(iv) किसी बल निर्देशक आरेख में बलों से संबंधित केवल वही सूचनाएँ (बलों के परिमाण तथा दिशाएँ) सम्मिलित कीजिए जो या तो आपको दी गई हैं अथवा जो निर्विवाद निश्चित हैं। (उदाहरण के लिए, किसी पतली डोरी में तनाव की दिशा सदैव डोरी की लंबाई के अनुदिश होती है।) शेष उन सभी को अज्ञात माना जाना चाहिए जिन्हें गति के नियमों के अनुप्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जाना है।

(v) यदि आवश्यक हो, तो संयोजन से किसी अन्य निकाय के लिए भी यही विधि अपनाइए। ऐसा करने के लिए न्यूटन का तृतीय नियम प्रयोग कीजिए। अर्थात्, यदि A के बल निर्देशक आरेख में B के कारण A पर बल को $\mathbf{F}$ द्वारा दर्शाया गया है, तो B के बल निर्देशक आरेख में A के कारण B पर बल को $-\mathbf{F}$ द्वारा दर्शाया जाना चाहिए।

निम्नलिखित उदाहरण में उपरोक्त विधि का स्पष्टीकरण किया गया है :

▶ ***उदाहरण 4.12*** किसी कोमल क्षैतिज फर्श पर 2 kg संहति का लकड़ी का गुटका रखा है (चित्र 4.15)। जब इस गुटके के ऊपर 25 kg संहति का लोहे का बेलन रखा जाता है तो फर्श स्थिर गति से नीचे धँसता है तथा गुटका व बेलन एक साथ 0.1 m s^{-2} त्वरण से नीचे जाते हैं। गुटके की फर्श पर क्रिया (a) फर्श के धँसने से पूर्व तथा (b) फर्श के धँसने के पश्चात् क्या है ? g = 10 m s^{-2} लीजिए। समस्या में क्रिया-प्रतिक्रिया युगलों को पहचानिए।



चित्र 4.15

हल

(a) फर्श पर गुटका विरामावस्था में है। इसका बल निर्देशक आरेख गुटके पर दो बलों को दर्शाता है, पृथ्वी द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल = 2 × 10 = 20 N; तथा गुटके पर फर्श

का अभिलंब बल R। प्रथम नियम के द्वारा गुटके पर आरोपित नेट बल शून्य होना चाहिए, अर्थात्, $R = 20$ N। तीसरे नियम का उपयोग करने पर गुटके की क्रिया अर्थात् गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल परिमाण में 20 N के बराबर है तथा इसकी दिशा ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी है।

(b) निकाय (गुटका + बेलन) नीचे की ओर $0.1\ \text{m s}^{-2}$ त्वरण से धँस रहा है। इसका बल निर्देशक आरेख निकाय पर दो बलों को दर्शाता है। पृथ्वी के कारण गुरुत्व बल (270 N); तथा फर्श का अभिलंब बल R'। ध्यान दीजिए, निकाय का बल निर्देशक आरेख गुटके और बेलन के बीच आंतरिक बलों को नहीं दर्शाता। निकाय पर द्वितीय नियम का अनुप्रयोग करने पर,

$$270 - R' = 27 \times 0.1$$

$$\text{अर्थात्}\ R' = 267.3\ \text{N}$$

तृतीय नियम के अनुसार फर्श पर निकाय की क्रिया 267.3 N के बराबर है तथा यह ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी है।

क्रिया-प्रतिक्रिया युगल

(a) के लिए :(i) पृथ्वी द्वारा गुटके पर आरोपित गुरुत्व बल (20 N) (क्रिया) तथा गुटके द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया) 20 N के बराबर उपरिमुखी निदेशित (आरेख में नहीं दर्शाया गया है)।

(ii) गुटके द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया); फर्श द्वारा गुटके पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

(b) के लिए (i) पृथ्वी द्वारा निकाय पर आरोपित गुरुत्व बल (270 N) (क्रिया); निकाय द्वारा पृथ्वी पर आरोपित गुरुत्व बल (प्रतिक्रिया) 270 N के बराबर उपरिमुखी निदेशित (आरेख में नहीं दर्शाया गया है।)

(ii) निकाय द्वारा फर्श पर आरोपित बल (क्रिया); फर्श द्वारा निकाय पर आरोपित बल (प्रतिक्रिया)

इसके अतिरिक्त (b) के लिए बेलन द्वारा गुटके पर आरोपित बल तथा गुटके द्वारा बेलन पर आरोपित बल भी क्रिया-प्रतिक्रिया का एक युगल बनाते हैं।

याद रखने योग्य एक महत्त्वपूर्ण तथ्य यह है कि किसी क्रिया-प्रतिक्रिया युगल की रचना दो पिण्डों के बीच पारस्परिक बलों, जो सदैव परिमाण में समान तथा दिशा में विपरीत होते हैं, से होती है। एक ही पिण्ड पर दो बलों, जो किसी विशेष परिस्थिति में परिमाण में समान व दिशा में विपरीत हो सकते हैं, से किसी क्रिया-प्रतिक्रिया युगल की रचना नहीं हो सकती। उदाहरण के लिए (a) अथवा (b) में पिण्ड पर गुरुत्व बल तथा फर्श द्वारा पिण्ड पर आरोपित अभिलंब बल कोई क्रिया-प्रतिक्रिया युगल नहीं है। ये बल संयोगवश (a) के लिए समान एवं विपरीत हैं क्योंकि पिण्ड विरामावस्था में है । परंतु प्रकरण (b) के लिए वे ऐसे नहीं हैं जैसा कि हमने पहले ही देख लिया है। निकाय का भार 270 N है जबकि अभिलंब बल $R' = 267.3$ N है। ◂

यांत्रिकी की समस्याओं को हल करने में बल निर्देशक आरेख खींचने की प्रथा अत्यंत सहायक है। यह आपको, अपने निकाय को स्पष्ट रूप से परिभाषित करने तथा उन सभी पिण्डों के कारण, जो स्वयं निकाय के भाग नहीं हैं, निकाय पर आरोपित सभी विभिन्न बलों पर विचार करने के लिए विवश करता है। इस अध्याय तथा आगामी अध्यायों में दिए गए अभ्यास-प्रश्नों द्वारा इस प्रथा के पोषण में आपको सहायता मिलेगी।

सारांश

1. अरस्तू का यह दृष्टिकोण, कि किसी पिण्ड की एकसमान गति रखने के लिए बल आवश्यक है, गलत है। व्यवहार में विरोधी घर्षण बल को प्रभावहीन करने के लिए कोई बल आवश्यक होता है।
2. गैलीलियो ने आनत समतलों पर पिण्डों की गतियों का बहिर्वेशन करके जड़त्व के नियम की खोज की। न्यूटन का गति का प्रथम नियम वही नियम है, जिसे फिर से शब्दों में इस प्रकार व्यक्त किया गया है :
   "प्रत्येक पिण्ड तब तक अपनी विरामावस्था अथवा किसी सरल रेखा में एकसमान गति की अवस्था में रहता है, जब तक कोई बाह्य बल उसे अन्यथा व्यवहार करने के लिए विवश नहीं करता।" सरल पदों में, प्रथम नियम इस प्रकार है *"यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल शून्य है तो उसका त्वरण शून्य होता है।"*
3. किसी पिण्ड का संवेग ($\mathbf{p}$) उसकी संहति (m) तथा वेग ($\mathbf{v}$) का गुणनफल होता है :
   $$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$$
4. न्यूटन का गति का द्वितीय नियम :
   किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन की दर आरोपित बल के अनुक्रमानुपाती होती है तथा संवेग परिवर्तन आरोपित बल की दिशा में होता है। इस प्रकार :

$$\mathbf{F} = k\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = k\,m\,\mathbf{a}$$

यहाँ **F** पिण्ड पर आरोपित नेट बाह्य बल है, तथा **a** पिण्ड में उत्पन्न त्वरण है। SI मात्रकों में राशियों के मात्रकों का चयन करने पर आनुपातिकता स्थिरांक $k = 1$ आता है। तब

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a}$$

बल का S.I. मात्रक न्यूटन (प्रतीक N) है : $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$

(a) द्वितीय नियम तथा प्रथम नियम में सामंजस्य है ($\mathbf{F} = 0$ का अर्थ है $\mathbf{a} = 0$)

(b) यह एक सदिश समीकरण है।

(c) सही अर्थों में तो यह किसी बिंदु कण पर लागू होती है। फिर भी किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय पर भी इसे लागू किया जा सकता है, परंतु शर्त यह है कि हम **F** को निकाय पर कुल आरोपित *बाह्य* बल तथा **a** को समस्त निकाय का त्वरण मानें।

(d) किसी निश्चित क्षण पर किसी बिंदु पर आरोपित बल **F** उसी क्षण उसी बिंदु पर **a** का निर्धारण करता है। अर्थात् द्वितीय नियम एक स्थानीय नियम है। किसी क्षण पर **a** गति के इतिहास पर निर्भर नहीं करता।

5. बल तथा समय का गुणनफल आवेग कहलाता है जो संवेग परिवर्तन के बराबर होता है।

आवेग की धारणा उस स्थिति में लाभदायक होती है जब कोई बृहत् बल अल्प काल के लिए कार्य करके संवेग में मापने योग्य परिवर्तन उत्पन्न कर देता है। क्योंकि बल का क्रिया समय अत्यंत अल्प है इसलिए यह माना जा सकता है कि आवेगी बल लगने के समय वस्तु की स्थिति में पर्याप्त परिवर्तन नहीं होगा।

6. न्यूटन का गति का तृतीय नियम :

प्रत्येक क्रिया की समान तथा विपरीत प्रतिक्रिया होती है।

सरल पदों में इस नियम को इस प्रकार भी अभिव्यक्त किया जा सकता है :

प्रकृति में बल सदैव ही पिण्डों के युगलों के बीच पाए जाते हैं। किसी पिण्ड A पर पिण्ड B द्वारा आरोपित बल पिण्ड B पर पिण्ड A द्वारा आरोपित बल के समान तथा विपरीत होता है।

क्रिया तथा प्रतिक्रिया समक्षणिक बल हैं। क्रिया तथा प्रतिक्रिया के बीच कारण–प्रभाव संबंध नहीं होता। इन दो पारस्परिक बलों में से किसी भी एक को क्रिया तथा अन्य को प्रतिक्रिया कहा जा सकता है। क्रिया तथा प्रतिक्रिया बल दो भिन्न पिण्डों पर कार्य करते हैं। अतः ये बल एक दूसरे को निरस्त नहीं कर सकते। तथापि, किसी पिण्ड में आंतरिक क्रिया तथा प्रतिक्रिया बलों का योग अवश्य ही शून्य होता है।

7. *संवेग संरक्षण नियम*

कणों के किसी वियुक्त निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है। यह नियम गति के द्वितीय तथा तृतीय नियमों से व्युत्पन्न हुआ है।

8. *घर्षण*

घर्षण बल दो संपर्क पृष्ठों के बीच आपेक्षिक गति (समुपस्थित अथवा वास्तविक) का विरोध करता है। यह संपर्क बल का संपर्क पृष्ठों के अनुदिश घटक है। स्थैतिक घर्षण f_s समुपस्थित आपेक्ष गति का विरोध करता है ; गतिज घर्षण f_k वास्तविक आपेक्ष गति का विरोध करता है। घर्षण बल संपर्क पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करते तथा निम्नलिखित सन्निकट नियम की तुष्टि करते हैं :

$$f_s \le \left(f_s\right)_{\text{अधिकतम}} = \mu_s R$$

$$f_k = \mu_k R$$

μ_s (स्थैतिक घर्षण गुणांक) तथा μ_k (गतिज घर्षण गुणांक) संपर्क पृष्ठों के युगल के अभिलक्षणों के स्थिरांक हैं। प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि μ_k, μ_s से तुलना में बहुत कम होता है।

राशि	प्रतीक	मात्रक	विमाएँ	टिप्पणी
संवेग	$\mathbf{p}$	$\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}$ अथवा N s	$[\mathrm{MLT^{-1}}]$	सदिश
बल	$\mathbf{F}$	N	$[\mathrm{MLT^{-2}}]$	$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ द्वितीय नियम
आवेग		$\mathrm{kg\ m\ s^{-1}}$ अथवा N s	$[\mathrm{MLT^{-1}}]$	आवेग = बल समय = संवेग परिवर्तन
स्थैतिक घर्षण	f_s	N	$[\mathrm{MLT^{2}}]$	$f_s \le \mu_s N$
गतिज घर्षण	f_k	N	$[\mathrm{MLT^{-2}}]$	$f_k = \mu_k N$

विचारणीय विषय

1. बल सदैव गति की दिशा में नहीं होता। परिस्थितियों पर निर्भर करते हुए, **F**, **v** के अनुदिश, **v** के विपरीत, **v** के अभिलंबवत् अथवा **v** से कोई अन्य कोण बनाते हुए हो सकता है। प्रत्येक स्थिति में, यह त्वरण के समान्तर होता है।
2. यदि किसी क्षण **v** = 0 है, अर्थात् यदि कोई पिण्ड क्षणिक विराम में है, तो इसका यह अर्थ नहीं होता कि उस क्षण पर बल अथवा त्वरण अवश्य ही शून्य हों। उदाहरण के लिए, जब ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंकी गई कोई गेंद अपनी अधिकतम ऊँचाई पर पहुँचती है, तो **v** = 0 होता है, परंतु उस गेंद पर गेंद के भार mg के बराबर बल निरंतर लगा रहता है तथा त्वरण शून्य नहीं होता, यह g ही होता है।
3. किसी दिए गए समय पर किसी पिण्ड पर आरोपित बल उस समय उस पिण्ड के स्थान की अवस्थिति द्वारा ज्ञात किया जाता है। कोई पिण्ड बल का वहन अपनी गति के पूर्व इतिहास से नहीं करता। जिस क्षण कोई पत्थर किसी त्वरित रेलगाड़ी से बाहर गिरा दिया जाता है, उस क्षण के तुरंत पश्चात्, यदि चारों ओर की वायु के प्रभाव अपेक्षणीय हैं तो उस पत्थर पर कोई क्षैतिज बल (अथवा त्वरण) कार्यरत नहीं रहता। तब उस पत्थर पर केवल पृथ्वी का ऊर्ध्वाधर गुरुत्व बल ही कार्य करता है।
4. गति के द्वितीय नियम **F** = m **a** में **F** पिण्ड के बाहर के सभी भौतिक साधनों द्वारा आरोपित नेट बल है। **a** बल का प्रभाव है। m **a** को **F** के अतिरिक्त अन्य कोई बल नहीं समझा जाना चाहिए।
5. अभिकेंद्र बल को कोई अन्य प्रकार का बल नहीं समझना चाहिए। यह मात्र एक नाम है जो उस बल को दिया गया है जो वर्तुल मार्ग पर गतिमान किसी पिण्ड को त्रिज्यत: केंद्र की ओर त्वरण प्रदान करता है। हमें वृत्तीय गतियों में सदैव ही अभिकेंद्र बल के रूप में कुछ भौतिक बलों; जैसे– तनाव, गुरुत्वाकर्षण बल, वैद्युत बल, घर्षण बल आदि को खोजना चाहिए।
6. स्थैतिक घर्षण बल अपनी सीमा $\mu_s N$ ($f_s \le \mu_s N$) तक एक स्वयं समायोजी बल है। बिना यह सुनिश्चित किए कि स्थैतिक घर्षण का अधिकतम मान कार्यरत हो गया है $f_s = \mu_s N$ कदापि मत रखिए।
7. मेज पर रखे पिण्ड के लिए सुपरिचित समीकरण $mg = R$ केवल तभी सही है, जब पिण्ड साम्यावस्था में हो। ये दोनों बल, mg तथा R भिन्न भी हो सकते हैं (जैसा कि त्वरित लिफ्ट में रखे पिण्ड के उदाहरण में)। mg और R में समानता का तृतीय नियम से कोई संबंध नहीं है।
8. गति के तृतीय नियम में पद 'क्रिया' तथा 'प्रतिक्रिया' का अर्थ किसी पिण्डों के युगल के बीच समक्षणिक पारस्परिक बलों से है। भाषा के अर्थ के विपरीत, क्रिया न तो प्रतिक्रिया से पहले घटित होती है और न ही प्रतिक्रिया का कारण होती है। क्रिया तथा प्रतिक्रिया भिन्न पिण्डों पर कार्य करती हैं।
9. विभिन्न पद जैसे 'घर्षण', 'अभिलंब प्रतिक्रिया', 'तनाव', वायु-प्रतिरोध' 'श्यान कर्षण', 'प्रणोद', 'उत्प्लावन बल', 'भार', 'अभिकेंद्र बल' इन सभी का तात्पर्य विभिन्न संदर्भों में 'बल' ही होता है। स्पष्टता के लिए, यांत्रिकी में मिलने वाले प्रत्येक बल तथा उसके तुल्य पदों को इस वाक्यांश में रूपान्तरित करना चाहिए 'A पर B द्वारा बल'।
10. गति के द्वितीय नियम को लागू करने के लिए, सजीव तथा निर्जीव पिण्डों के बीच कोई वैचारिक भिन्नता नहीं होती। किसी सजीव पिण्ड, जैसे किसी मानव को भी त्वरित करने के लिए बाह्य बल चाहिए। उदाहरण के लिए, बाह्य घर्षण बल के बिना हम धरती पर चल ही नहीं सकते।
11. भौतिकी में 'बल' की वस्तुनिष्ठ संकल्पना तथा 'बल का अनुभव' की व्यक्तिनिष्ठ संकल्पना के बीच कोई भ्रम नहीं होना चाहिए। किसी 'मेरी-गो-राउण्ड' में हमारे शरीर के सभी अंगों पर अंदर की ओर बल लगता है। परंतु हमें बाहर की ओर धकेले जाने का अनुभव होता है जो समुपस्थित गति की दिशा है।

अभ्यास

(सरलता के लिए आंकिक परिकलनाओं में $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ लीजिए)

4.1 निम्नलिखित पर कार्यरत नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा लिखिए :

(a) एकसमान चाल से नीचे गिरती वर्षा की कोई बूंद,

(b) जल में तैरता 10 g संहति का कोई कार्क,

(c) कुशलता से आकाश में स्थिर रोकी गई कोई पतंग,

(d) 30 km h^{-1} के एकसमान वेग से ऊबड़-खाबड़ सड़क पर गतिशील कोई कार,

(e) सभी गुरुत्वीय पिण्डों से दूर तथा वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों से मुक्त, अंतरिक्ष में तीव्र चाल वाला इलेक्ट्रॉन।

4.2 0.05 kg संहति का कोई कंकड़ ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंका गया है। नीचे दी गई प्रत्येक परिस्थिति में कंकड़ पर लग रहे नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा लिखिए :

(a) उपरिमुखी गति के समय।

(b) अधोमुखी गति के समय।

(c) उच्चतम बिंदु पर जहाँ क्षण भर के लिए यह विराम में रहता है। यदि कंकड़ को क्षैतिज दिशा से 45° कोण पर फेंका जाए, तो क्या आपके उत्तर में कोई परिवर्तन होगा ?

वायु-प्रतिरोध को उपेक्षणीय मानिए।

4.3 0.1 kg संहति के पत्थर पर कार्यरत नेट बल का परिमाण व उसकी दिशा निम्नलिखित परिस्थितियों में ज्ञात कीजिए :

(a) पत्थर को स्थिर रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात्,

(b) पत्थर को 36 km h^{-1} के एकसमान वेग से गतिशील किसी रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात्,

(c) पत्थर को 1 m s^{-2} के त्वरण से गतिशील किसी रेलगाड़ी की खिड़की से गिराने के तुरंत पश्चात्,

(d) पत्थर 1 m s^{-2} के त्वरण से गतिशील किसी रेलगाड़ी के फर्श पर पड़ा है तथा वह रेलगाड़ी के सापेक्ष विराम में है।

उपरोक्त सभी स्थितियों में वायु का प्रतिरोध उपेक्षणीय मानिए।

4.4 l लंबाई की एक डोरी का एक सिरा m संहति के किसी कण से तथा दूसरा सिरा चिकनी क्षैतिज मेज पर लगी खूँटी से बँधा है। यदि कण v चाल से वृत्त में गति करता है तो कण पर (केंद्र की ओर निदेशित) नेट बल है :

(i) T, (ii) $T-\dfrac{mv^2}{l}$, (iii) $T+\dfrac{mv^2}{l}$, (iv) 0

T डोरी में तनाव है। [सही विकल्प चुनिए]

4.5 15 m s^{-1} की आरंभिक चाल से गतिशील 20 kg संहति के किसी पिण्ड पर 50 N का स्थाई मंदन बल आरोपित किया गया है। पिण्ड को रुकने में कितना समय लगेगा ?

4.6 3.0 kg संहति के किसी पिण्ड पर आरोपित कोई बल 25 s में उसकी चाल को 2.0 m s^{-1} से 3.5 m s^{-1} कर देता है। पिण्ड की गति की दिशा अपरिवर्तित रहती है। बल का परिमाण व दिशा क्या है ?

4.7 4-0 kg संहति के किसी पिण्ड पर 8 N व 6 N के दो लंबवत् बल आरोपित हैं। पिण्ड के त्वरण का परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

4.8 36 km h^{-1} की चाल से गतिमान किसी आटो रिक्शा का चालक सड़क के बीच एक बच्चे को खड़ा देखकर अपने वाहन को ठीक 4.0 s में रोककर उस बच्चे को बचा लेता है। यदि आटो रिक्शा बच्चे के ठीक निकट रुकता है, तो वाहन पर लगा औसत मंदन बल क्या है ? आटोरिक्शा तथा चालक की संहतियाँ क्रमशः 400 kg और 65 kg हैं।

4.9 20,000 kg उत्थापन संहति के किसी राकेट में 5 m s^{-2} के आरंभिक त्वरण के साथ ऊपर की ओर स्फोट किया जाता है। स्फोट का आरंभिक प्रणोद (बल) परिकलित कीजिए।

4.10 उत्तर की ओर 10 m s^{-1} की एकसमान आरंभिक चाल से गतिमान 0.40 kg संहति के किसी पिण्ड पर दक्षिण दिशा के अनुदिश 8.0 N का स्थाई बल 30 s के लिए आरोपित किया गया है। जिस क्षण बल आरोपित किया गया उसे $t = 0$, तथा उस समय पिण्ड की स्थिति $x = 0$ लीजिए। $t = -5$ s, 25 s, 100 s पर इस कण की स्थिति क्या होगी?

4.11 कोई ट्रक विरामावस्था से गति आरंभ करके 2.0 m s^{-2} के समान त्वरण से गतिशील रहता है। $t = 10$ s पर, ट्रक के ऊपर खड़ा एक व्यक्ति धरती से 6 m की ऊँचाई से कोई पत्थर बाहर गिराता है। $t = 11$ s पर, पत्थर का (a) वेग, तथा (b) त्वरण क्या है ? (वायु का प्रतिरोध उपेक्षणीय मानिए।)

4.12 किसी कमरे की छत से 2 m लंबी डोरी द्वारा 0.1 kg संहति के गोलक को लटकाकर दोलन आरंभ किए गए। अपनी माध्य स्थिति पर गोलक की चाल 1 m s^{-1} है। गोलक का प्रक्षेप-पथ क्या होगा यदि डोरी को उस समय काट दिया जाता है जब गोलक अपनी (a) चरम स्थितियों में से किसी एक पर है, तथा (b) माध्य स्थिति पर है ?

4.13 किसी व्यक्ति की संहति 70 kg है। वह एक गतिमान लिफ्ट में तुला पर खड़ा है जो

(a) 10 m s^{-1} की एकसमान चाल से ऊपर जा रही है,

(b) 5 m s^{-2} के एकसमान त्वरण से नीचे जा रही है,

(c) 5 m s^{-2} के एकसमान त्वरण से ऊपर जा रही है,

तो प्रत्येक प्रकरण में तुला के पैमाने का पाठ्यांक क्या होगा ?

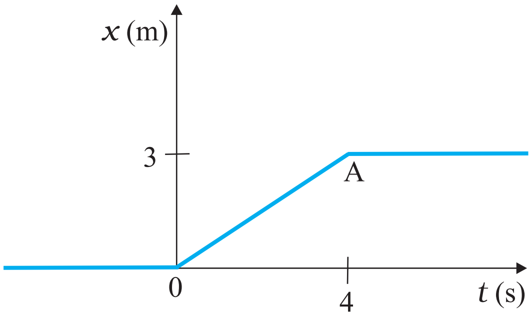
(d) यदि लिफ्ट की मशीन में खराबी आ जाए और वह गुरुत्वीय प्रभाव में मुक्त रूप से नीचे गिरे तो पाठ्यांक क्या होगा?

4.14 चित्र 4.16 में 4 kg संहति के किसी पिण्ड का स्थिति-समय ग्राफ दर्शाया गया है।

(a) $t < 0$; $t > 4$ s; $0 < t < 4$ s के लिए पिण्ड पर आरोपित बल क्या है ?

(b) $t = 0$ तथा $t = 4$ s पर आवेग क्या है ?

(केवल एकविमीय गति पर विचार कीजिए)



चित्र 4.16

4.15 किसी घर्षणरहित मेज पर रखे 10 kg तथा 20 kg के दो पिण्ड किसी पतली डोरी द्वारा आपस में जुड़े हैं। 600N का कोई क्षैतिज बल (i) A पर, (ii) B पर डोरी के अनुदिश लगाया जाता है। प्रत्येक स्थिति में डोरी में तनाव क्या है ?

4.16 8 kg तथा 12 kg के दो पिण्डों को किसी हलकी अवितान्य डोरी, जो घर्षणरहित घिरनी पर चढ़ी है, के दो सिरों से बाँधा गया है। पिण्डों को मुक्त छोड़ने पर उनके त्वरण तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

4.17 प्रयोगशाला के निर्देश फ्रेम में कोई नाभिक विराम में है। यदि यह नाभिक दो छोटे नाभिकों में विघटित हो जाता है, तो यह दर्शाइए कि उत्पाद विपरीत दिशाओं में गति करने चाहिए।

4.18 दो बिलियर्ड गेंद जिनमें प्रत्येक की संहति 0.05 kg है, 6 m s^{-1} की चाल से विपरीत दिशाओं में गति करती हुई संघट्ट करती है और संघट्ट के पश्चात् उसी चाल से वापस लौटती हैं। प्रत्येक गेंद पर दूसरी गेंद कितना आवेग लगाती है ?

4.19 100 kg संहति की किसी तोप द्वारा 0.020 kg का गोला दागा जाता है। यदि गोले की नालमुखी चाल 80 m s^{-1} है, तो तोप की प्रतिक्षेप चाल क्या है ?

4.20 कोई बल्लेबाज किसी गेंद को 45° के कोण पर विक्षेपित कर देता है। ऐसा करने में वह गेंद की आरंभिक चाल, जो 54 km/h^{-1} है, में कोई परिवर्तन नहीं करता। गेंद को कितना आवेग दिया जाता है ? (गेंद की संहति 0.15 kg है।)

4.21 किसी डोरी के एक सिरे से बँधा 0.25 kg संहति का कोई पत्थर क्षैतिज तल में 1.5 m त्रिज्या के वृत्त पर 40 rev/min की चाल से चक्कर लगाता है? डोरी में तनाव कितना है ? यदि डोरी 200 N के अधिकतम तनाव को सहन कर सकती है, तो वह अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जिससे पत्थर को घुमाया जा सकता है।

4.22 यदि अभ्यास 4.21 में पत्थर की चाल को अधिकतम निर्धारित सीमा से भी अधिक कर दिया जाए, तथा डोरी यकायक टूट जाए, तो डोरी के टूटने के पश्चात् पत्थर के प्रक्षेप का सही वर्णन निम्नलिखित में से कौन करता है :

(a) वह पत्थर झटके के साथ त्रिज्यतः बाहर की ओर जाता है।

(b) डोरी टूटने के क्षण पत्थर स्पर्शरेखीय पथ पर उड़ जाता है।

(c) पत्थर स्पर्शी से किसी कोण पर, जिसका परिमाण पत्थर की चाल पर निर्भर करता है, उड़ जाता है।

4.23 स्पष्ट कीजिए कि क्यों :

(a) कोई घोड़ा रिक्त दिक्स्थान में किसी गाड़ी को खींचते हुए दौड़ नहीं सकता।

(b) किसी तीव्र गति से चल रही बस के यकायक रुकने पर यात्री आगे की ओर गिरते हैं।

(c) लान मूवर को धकेलने की तुलना में खींचना आसान होता है।

(d) क्रिकेट का खिलाड़ी गेंद को लपकते समय अपने हाथ गेंद के साथ पीछे को खींचता है।

11088CH06

अध्याय 5

कार्य, ऊर्जा और शक्ति

5.1 भूमिका

दैनिक बोल चाल की भाषा में हम प्रायः 'कार्य', 'ऊर्जा', और 'शक्ति' शब्दों का प्रयोग करते हैं। यदि कोई किसान खेत जोतता है, कोई मिस्त्री ईंट ढोता है, कोई छात्र परीक्षा के लिए पढ़ता है या कोई चित्रकार सुन्दर दृश्यभूमि का चित्र बनाता है तो हम कहते हैं कि सभी कार्य कर रहे हैं परन्तु भौतिकी में कार्य शब्द को परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। जिस व्यक्ति में प्रतिदिन चौदह से सोलह घण्टें कार्य करने की क्षमता होती है, उसे अधिक शक्ति या ऊर्जा वाला कहते हैं। हम लंबी दूरी वाले घातक को उसकी शक्ति या ऊर्जा के लिए प्रशंसा करते हैं। इस प्रकार ऊर्जा कार्य करने की क्षमता है। भौतिकी में भी ऊर्जा कार्य से इसी प्रकार सम्बन्धित है परन्तु जैसा ऊपर बताया गया है शब्द कार्य को और अधिक परिशुद्ध रूप से परिभाषित करते हैं। शक्ति शब्द का दैनिक जीवन में प्रयोग विभिन्न अर्थो में होता है। कराटे या बॉक्सिंग में शक्तिशाली मुक्का वही माना जाता है जो तेज गति से मारा जाता है। शब्द 'शक्ति' का यह अर्थ भौतिकी में इस शब्द के अर्थ के निकट है। हम यह देखेंगे कि इन पदों की भौतिक परिभाषाओं तथा इनके द्वारा मस्तिष्क में बने कार्यकीय चित्रणों के बीच अधिक से अधिक यह सम्बन्ध अल्प ही होता है। इस पाठ का लक्ष्य इन तीन भौतिक राशियों की धारणाओं का विकास करना है लेकिन इसके पहले हमें आवश्यक गणितीय भाषा मुख्यतः दो सदिशों के अदिश गुणनफल को समझना होगा।

5.1.1 अदिश गुणनफल

अध्याय 4 में हम लोगों ने सदिश राशियों और उनके प्रयोगों के बारे में पढ़ा है। कई भौतिक राशियाँ; जैसे-विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि सदिश हैं। हम लोगों ने सदिशों को जोड़ना और घटाना भी सीखा है। अब हम लोग सदिशों के गुणन के बारे में अध्ययन करेंगे। सदिशों को गुणा करने की दो विधियाँ हैं। प्रथम विधि से दो सदिशों के गुणनफल से अदिश गुणनफल प्राप्त होता है और इसे अदिश गुणनफल कहते हैं। दूसरी विधि में दो सदिशों के गुणनफल से एक सदिश प्राप्त होता है और इसे सदिश गुणनफल कहते हैं। सदिश गुणनफल के बारे में हम लोग अध्याय 6 में पढ़ेंगे। इस अध्याय में हम लोग अदिश गुणनफल की विवेचना करेंगे।

किन्हीं दो सदिशों **A** तथा **B** के अदिश या बिंदु-गुणनफल (डॉट गुणनफल) को हम [**A.B (A** डॉट **B)**] के रूप में लिखते हैं और निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$\mathbf{A.B} = AB\cos\theta \qquad (5.1a)$$

यहाँ θ दो सदिशों **A** तथा **B** के बीच का कोण है। इसे चित्र 5.1a में दिखाया गया है। क्योंकि, B तथा $\cos\theta$ सभी अदिश हैं इसलिए **A** तथा **B** का बिंदु गुणनफल भी अदिश राशि है। **A** व **B** में से प्रत्येक की अपनी-अपनी दिशा है किन्तु उनके अदिश गुणनफल की कोई दिशा नहीं है।

समीकरण (5.1a) से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है :

$$\mathbf{A\cdot B} = A\,(B\cos\theta)$$
$$= B\,(A\cos\theta)$$

ज्यामिति के अनुसार $B\cos\theta$ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है (चित्र 5.1b)। इसी प्रकार $A\cos\theta$ सदिश **A** का सदिश **B** पर प्रक्षेप है (देखिए चित्र 5.1c)। इस प्रकार **A·B** सदिश **A** के परिमाण तथा **B** के अनुदिश **A** के घटक के गुणनफल के बराबर होता है। दूसरे तरीके से यह **B** के परिमाण तथा **A** का सदिश **B** के अनुदिश घटक के गुणनफल के बराबर है।

समीकरण (5.1a) से यह संकेत भी मिलता है कि अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है–

$$\mathbf{A\cdot B} = \mathbf{B\cdot A}$$

अदिश गुणनफल **वितरण-नियम** का भी पालन करते हैं :

$$\mathbf{A\cdot(B + C)} = \mathbf{A\cdot B} + \mathbf{A\cdot C}$$

तथा,

$$\mathbf{A.}(\lambda\,\mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{A\cdot B})$$

यहाँ λ एक वास्तविक संख्या है।

उपरोक्त समीकरणों की व्युत्पत्ति आपके लिए अभ्यास हेतु छोड़ी जा रही है।

अब हम एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ का अदिश गुणनफल निकालेंगे। क्योंकि वे एक दूसरे के लंबवत् हैं, इसलिए

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$
$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

दो सदिशों

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

का अदिश गुणनफल होगा :

$$\mathbf{A\cdot B} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (5.1b)$$

अदिश गुणनफल परिभाषा तथा समीकरण (5.1b) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

(i) $\mathbf{A\cdot A} = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z$

अथवा $A^2 = A^2_x + A^2_y + A^2_z \qquad (5.1c)$

क्योंकि $\mathbf{A\cdot A} = |\mathbf{A}||\mathbf{A}|\cos 0 = A^2$

(ii) $\mathbf{A\cdot B} = 0$ यदि। **A** व **B** एक दूसरे के लंबवत् हैं।

उदाहरण 5.1 बल $\mathbf{F} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}})$ तथा विस्थापन $\mathbf{d} = (5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$ के बीच का कोण ज्ञात करें। **F** का **d** पर प्रक्षेप भी ज्ञात करें।

हल $\mathbf{F\cdot d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z$
$= 3(5) + 4(4) + (-5)(3)$
$= 16$ unit

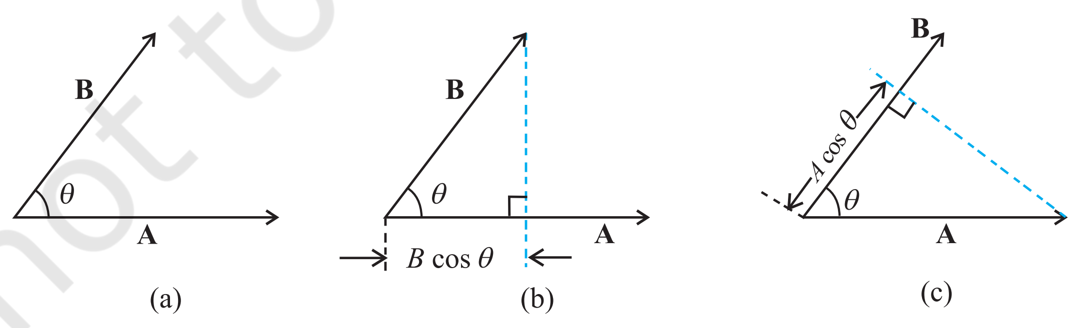
अत: $\mathbf{F\cdot d} = Fd\cos\theta = 16$ unit

अब $\mathbf{F\cdot F} = F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$
$= 9 + 16 + 25$
$= 50$ unit

तथा $\mathbf{d\cdot d} = d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2$
$= 25 + 16 + 9$
$= 50$ unit

$$\therefore \cos\theta = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{16}{50} = 0.32$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.32$$



चित्र 5.1 *(a) दो सदिशों **A** व **B** का अदिश गुणनफल एक अदिश होता है अर्थात् **A·B** = AB cos θ, (b) B cos θ सदिश **B** का सदिश **A** पर प्रक्षेप है, (c) A cos θ सदिश **A** का **B** पर प्रक्षेप है।*

5.2 कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणा : कार्य-ऊर्जा प्रमेय

अध्याय 2 में, नियत त्वरण a के अंतर्गत सरल रेखीय गति के लिए आप निम्न भौतिक संबंध पढ़ चुके हैं;

$$v^2 - u^2 = 2as \qquad (5.2)$$

जहाँ u तथा v क्रमशः आरंभिक व अंतिम चाल और s वस्तु द्वारा चली गई दूरी है। दोनों पक्षों को $m/2$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = mas = Fs \qquad (5.2a)$$

जहाँ आखिरी चरण न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार है। इस प्रकार सदिशों के प्रयोग द्वारा सहज ही समीकरण (5.2) का त्रिविमीय व्यापकीकरण कर सकते हैं

$$v^2 - u^2 = 2\,\mathbf{a.d}$$

यहाँ a और b पिंड के क्रमशः त्वरण और विस्थापन सदिश हैं। एक बार फिर दोनों पक्षों को $m/2$ से गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = m\,\mathbf{a.d} = \mathbf{F.d} \qquad (5.2b)$$

उपरोक्त समीकरण कार्य एवं गतिज ऊर्जा को परिभाषित करने के लिए प्रेरित करता है। समीकरण (5.2 b) में बायाँ पक्ष वस्तु के द्रव्यमान के आधे और उसकी चाल के वर्ग के गुणनफल के अंतिम और आरंभिक मान का अंतर है। हम इनमें से प्रत्येक राशि को 'गतिज ऊर्जा' कहते हैं और संकेत K से निर्दिष्ट करते हैं। समीकरण का दायाँ पक्ष वस्तु पर आरोपित बल का विस्थापन के अनुदिश घटक और वस्तु के विस्थापन का गुणनफल है। इस राशि को 'कार्य' कहते हैं और इसे संकेत W से निर्दिष्ट करते हैं। अतः समीकरण (5.2 b) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$K_f - K_i = W \qquad (5.3)$$

जहाँ K_i तथा K_f वस्तु की आरंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जा हैं। कार्य किसी वस्तु पर लगने वाले बल और इसके विस्थापन के संबंध को बताता है। **अतः किसी निश्चित विस्थापन के दौरान वस्तु पर लगाया गया बल कार्य करता है।**

समीकरण (5.3) कार्य-ऊर्जा प्रमेय की एक विशेष स्थिति है जो यह प्रदर्शित करती है कि **किसी वस्तु पर लगाए गए कुल बल द्वारा किया गया कार्य उस वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।** परिवर्ती बल के लिए उपरोक्त व्युत्पत्ति का व्यापकीकरण हम अनुभाग 5.6 में करेंगे।

उदाहरण 5.2 हम अच्छी तरह जानते हैं कि वर्षा की बूँद नीचे की ओर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल और बूँद के गिरने की दिशा के विपरीत लगने वाले प्रतिरोधी बल के प्रभाव के अधीन गिरती है। प्रतिरोधी बल बूँद की चाल के अनुक्रमानुपाती, परंतु अनिर्धारित होता है। माना कि 1.00 g द्रव्यमान की वर्षा की बूँद 1.00 km ऊँचाई से गिर रही है। यह धरातल पर 50.00 m s^{-1} की चाल से संघट्ट करती है। (a) गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य क्या है? (b) अज्ञात प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य क्या है ?

हल (a) बूँद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\,v^2 - 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 50 \times 50$$

$$= 1.25 \text{ J}$$

यहाँ हमने यह मान लिया है कि बूँद विरामावस्था से गिरना आरंभ करती है।

गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_g = mgh$

मान लीजिए कि $g = 10$ m s^{-2} है।

अतः $W_g = mgh$

$$= 10^{-3} \times 10 \times 10^3$$

$$= 10 \text{ J}$$

(b) कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, $\Delta K = W_g + W_r$

जहाँ W_r प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य है। अतः

$$W_r = \Delta K - W_g$$

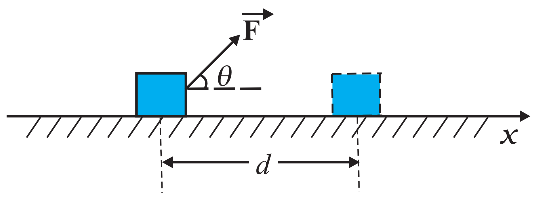
$$= 1.25 - 10$$

$$= -8.75 \text{ J}$$

ऋणात्मक है। ◀

5.3 कार्य

उपरोक्त अनुभाग में आपने देखा कि कार्य, बल और उसके द्वारा वस्तु के विस्थापन से संबंधित होता है। माना कि एक अचर बल **F**, किसी m द्रव्यमान के पिंड पर लग रहा है जिसके कारण पिंड का धनात्मक x-दिशा में होने वाला विस्थापन **d** है जैसा कि चित्र 5.2 में दर्शाया गया है।



*चित्र 5.2 किसी पिंड का आरोपित बल **F** के कारण विस्थापन **d** ।*

अतः किसी बल द्वारा किया गया कार्य "बल के विस्थापन की दिशा के अनुदिश घटक और विस्थापन के परिमाण के गुणनफल" के रूप में परिभाषित किया जाता है। अतः

$$W = (F\cos\theta)\, d = \mathbf{F}\,.\,\mathbf{d} \tag{5.4}$$

हम देखते हैं कि यदि वस्तु का विस्थापन शून्य है तो बल का परिमाण कितना ही अधिक क्यों न हो, वस्तु द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। जब कभी आप किसी ईंटों की दृढ़ दीवार को धक्का देते हैं तो कोई कार्य नहीं होता है। इस प्रक्रिया में आपकी मांसपेशियों का बारी-बारी से संकुचन और शिथिलीकरण हो रहा है और आंतरिक ऊर्जा लगातार व्यय हो रही है और आप थक जाते हैं। भौतिक विज्ञान में कार्य का अर्थ इसके दैनिक भाषा में प्रयोग के अर्थ से भिन्न है।

कोई भी कार्य संपन्न हुआ नहीं माना जाता है यदि :

(i) वस्तु का विस्थापन शून्य है, जैसा कि पूर्ववर्ती उदाहरण में आपने देखा। कोई भारोत्तोलक 150 kg द्रव्यमान के भार को 30 s तक अपने कंधे पर लगातार उठाए हुए खड़ा है तो वह कोई कार्य नहीं कर रहा है ।

(ii) बल शून्य है। किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड पर कोई क्षैतिज बल कार्य नहीं करता है, (क्योंकि घर्षण नहीं है) परंतु पिंड का विस्थापन काफी अधिक हो सकता है।

(iii) बल और विस्थापन परस्पर लंबवत् हैं क्योंकि $\theta = \pi/2$ rad (= 90°), cos $(\pi/2) = 0$। किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर गतिमान पिंड के लिए गुरुत्वाकर्षण बल mg कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि यह विस्थापन के लंबवत् कार्य कर रहा है। पृथ्वी के परितः चंद्रमा की कक्षा लगभग वृत्ताकार है। यदि हम चंद्रमा की कक्षा को पूर्ण रूप से वृत्ताकार मान लें, तो पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि चंद्रमा का तात्कालिक विस्थापन स्पर्शरेखीय है जबकि पृथ्वी का बल त्रिज्यीय (केंद्र की ओर) है, अर्थात् $\theta = \pi/2$ ।

कार्य धनात्मक व ऋणात्मक दोनों प्रकार का हो सकता है। यदि θ, 0° और 90° के मध्य है तो समीकरण (5.4) में cos θ का मान धनात्मक होगा। यदि θ, 90° और 180° के मध्य है तो cos θ का मान ऋणात्मक होगा। अनेक उदाहरणों में घर्षण बल, विस्थापन का विरोध करता है और $\theta = 180°$ होता है। ऐसी दशा में घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है (cos 180° = –1)।

समीकरण (5.4) से स्पष्ट है कि कार्य और ऊर्जा की विमाएँ समान $[\mathrm{M\,L^2T^{-2}}]$ हैं । ब्रिटिश भौतिकविद जेम्स प्रेसकॉट जूल (1818–1869) के सम्मान में इनका SI मात्रक 'जूल' कहलाता है। चूंकि कार्य एवं ऊर्जा व्यापक रूप से भौतिक धारणाओं के रूप में प्रयोग किए जाते हैं, अतः ये वैकल्पिक मात्रकों से भरपूर हैं और उनमें से कुछ सारणी 5.1 में सूचीबद्ध हैं।

सारणी 5.1 : कार्य/ऊर्जा के वैकल्पिक मात्रक (जूल में)

अर्ग	10^{-7} J
इलेक्ट्रॉन वोल्ट (eV)	1.6×10^{-19} J
कैलोरी (cal)	4.186 J
किलोवाट-घंटा (kWh)	3.6×10^{6} J

▶ ***उदाहरण 5.3*** कोई साइकिल सवार ब्रेक लगाने पर फिसलता हुआ 10 m दूर जाकर रुकता है। इस प्रक्रिया की अवधि में, सड़क द्वारा साइकिल पर लगाया गया बल 200 N है जो उसकी गति के विपरीत है। (a) सड़क द्वारा साइकिल पर कितना कार्य किया गया? (b) साइकिल द्वारा सड़क पर कितना कार्य किया गया?

हल सड़क द्वारा साइकिल पर किया गया कार्य सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए गए विरोधी (घर्षण बल) द्वारा किया किया कार्य है।

(a) यहाँ विरोधी बल और साइकिल के विस्थापन के मध्य कोण 180° (या π rad) है। अतः सड़क द्वारा किया गया कार्य

$$W_r = Fd\cos\theta$$
$$= 200 \times 10 \times \cos\pi$$
$$= -2000\ \mathrm{J}$$

कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार, इस ऋणात्मक कार्य के कारण ही साइकिल रुक जाती है।

(b) न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार साइकिल द्वारा सड़क पर लगाया गया बल सड़क द्वारा साइकिल पर लगाए बल के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा। इसका परिमाण 200 N है । तथापि, सड़क का विस्थापन नहीं होता है । अतः साइकिल द्वारा सड़क पर किया गया कार्य शून्य होगा। ◀

इस उदाहरण से हमें यह पता चलता है कि यद्यपि पिंड B द्वारा A पर लगाया गया बल, पिंड A द्वारा पिंड B पर लगाए गए बल के बराबर तथा विपरीत दिशा में है (न्यूटन का गति का तीसरा नियम) तथापि यह आवश्यक नहीं है कि पिंड B द्वारा A पर किया गया कार्य, पिंड A द्वारा B पर किए गए कार्य के बराबर तथा विपरीत दिशा में हो।

5.4 गतिज ऊर्जा

जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, यदि किसी पिंड का द्रव्यमान m और वेग $\mathbf{v}$ है तो इसकी गतिज ऊर्जा,

$$K = \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}.\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.5}$$

गतिज ऊर्जा एक अदिश राशि है।

सारणी 5.2 विशिष्ट गतिज ऊर्जाएँ (K)

पिंड	द्रव्यमान (kg)	चाल (m s⁻¹)	K (J)
कार	2000	25	6.3 10^5
धावक (ऐथलीट)	70	10	3.5 10^3
गोली	5 10^{-2}	200	10^3
10 m की ऊँचाई से गिरता पत्थर	1	14	10^2
अंतिम वेग से गिरती वर्षा की बूँद	3.5 10^{-5}	9	1.4 10^{-3}
वायु का अणु	$\simeq 10^{-26}$	500	$\simeq 10^{-21}$

किसी पिंड की गतिज ऊर्जा, उस पिंड द्वारा किए गए कार्य की माप होती है जो वह अपनी गति के कारण कर सकता है। इस धारणा का अंतर्ज्ञान काफी समय से है। तीव्र गति से बहने वाली जल की धारा की गतिज ऊर्जा का उपयोग अनाज पीसने के लिए किया जाता है। पाल जलयान पवन की गतिज ऊर्जा का प्रयोग करते हैं। सारणी 5.2 में विभिन्न पिंडों की गतिज ऊर्जाएँ सूचीबद्ध हैं।

▶ ***उदाहरण 5.4*** किसी प्राक्षेपिक प्रदर्शन में एक पुलिस अधिकारी 50 g द्रव्यमान की गोली को 2cm मोटी नरम परतदार लकड़ी (प्लाइवुड) पर 200 m s⁻¹ की चाल से फायर करता है। नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की गतिज ऊर्जा प्रारंभिक ऊर्जा की 10% रह जाती है। लकड़ी से निकलते समय गोली की चाल क्या होगी?

हल गोली की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

$$mv^2/2 = 1000 \text{ J}$$

गोली की अंतिम गतिज ऊर्जा = 0.1 1000 = 100 J। यदि गोली की नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् चाल v_f है तो,

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = 100 \text{ J}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 100 \text{ J}}{0.05 \text{ kg}}}$$

$$= 63.2 \text{ m s}^{-1}$$

नरम लकड़ी को भेदने के पश्चात् गोली की चाल लगभग 68% कम हो गई है (90% नहीं)। ◀

5.5 परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य

अचर बल दुष्प्राप्य है। अधिकतर परिवर्ती बल के उदाहरण ही देखने को मिलते हैं। चित्र 5.3 एकविमीय परिवर्ती बल का आलेख है।

यदि विस्थापन Δx सूक्ष्म है तब हम बल $F(x)$ को भी लगभग नियत ले सकते हैं और तब किया गया कार्य

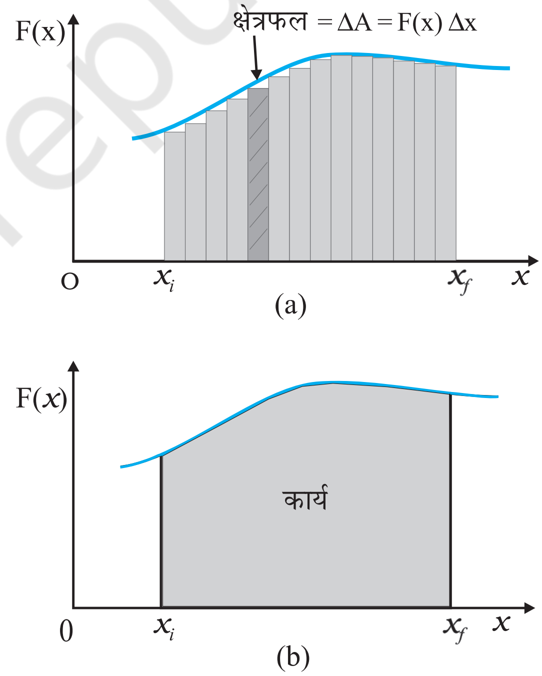
$$\Delta W = F(x)\, \Delta x$$

इसे चित्र 5.3(a) में समझाया गया है। चित्र 5.3(a) में क्रमिक आयताकार क्षेत्रफलों का योग करने पर हमें कुल किया गया कार्य प्राप्त होता है जिसे इस प्रकार लिखा जाता है :

$$W \cong \sum_{x_i}^{x_f} F(x)\Delta x \qquad (5.6)$$

जहाँ संकेत 'Σ' का अर्थ है संकलन-फल (योगफल), जबकि 'x_i' वस्तु की आरंभिक स्थिति और 'x_f' वस्तु की अंतिम स्थिति को निरूपित करता है।

यदि विस्थापनों को अतिसूक्ष्म मान लिया जाए तब योगफल में पदों की संख्या असीमित रूप से बढ़ जाती है लेकिन योगफल एक निश्चित मान के समीप पहुंच जाता है जो चित्र 5.3(b) में वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के समान होता है।



चित्र 5.3 *(a) परिवर्ती बल $F(x)$ द्वारा सूक्ष्म विस्थापन Δx में किया गया कार्य $\Delta W = F(x)\Delta x$ छायांकित आयत से निरूपित है। (b) $\Delta x \to 0$ के लिए सभी आयतों के क्षेत्रफलों को जोड़ने पर, वक्र द्वारा आच्छादित क्षेत्रफल, बल $F(x)$ द्वारा किए गए कार्य के ठीक बराबर है।*

अतः किया गया कार्य

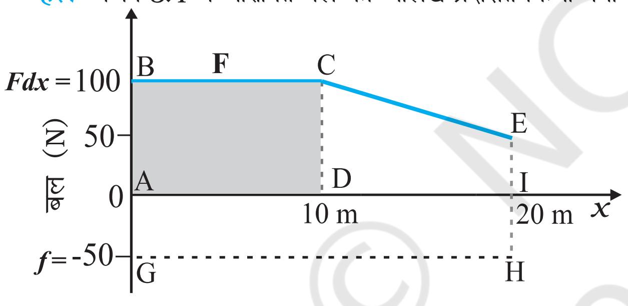
$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{xi}^{xf} F(x)\Delta x$$

$$= \int_{xi}^{xf} F(x)\, dx \qquad (5.7)$$

जहाँ '*lim*' का अर्थ है 'योगफल की सीमा' जबकि Δx नगण्य रूप से सूक्ष्म मानों की ओर अग्रसर है। इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए किए गए कार्य को बल का विस्थापन पर सीमांकित समाकलन, के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।

▶ ***उदाहरण 5.5*** कोई स्त्री खुरदरी सतह वाले रेलवे प्लेटफार्म पर संदूक को खिसकाती है। वह 10 m की दूरी तक 100 N का बल आरोपित करती है। उसके पश्चात्, उत्तरोत्तर वह थक जाती है और उसके द्वारा आरोपित बल रेखीय रूप से घटकर 50 N हो जाता है। संदूक को कुल 20 m की दूरी तक खिसकाया जाता है। स्त्री द्वारा संदूक पर आरोपित बल और घर्षण बल जो कि 50 N है, तथा विस्थापन के बीच ग्राफ खींचिए। दोनों बलों द्वारा 20 m तक किए गए कार्य का परिकलन कीजिए ।

हल चित्र 5.4 में आरोपित बल का आलेख प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 5.4 *किसी स्त्री द्वारा आरोपित बल F और विरोधी घर्षण बल f तथा विस्थापन के बीच ग्राफ।*

$x = 20$ m पर $F = 50$ N($\neq 0$) है। हमें घर्षण बल f दिया गया है जिसका परिमाण है

$|f| = 50$ N

यह गति का विरोध करता है और आरोपित बल **F** के विपरीत दिशा में कार्य करता है। इसलिए, इसे बल-अक्ष की ऋणात्मक दिशा की ओर प्रदर्शित किया गया है।

स्त्री द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$(आयत ABCD + समलंब CEID) का क्षेत्रफल

$$W_F = 100 \times 10 + \frac{1}{2}(100 + 50) \times 10$$
$$= 1000 + 750$$
$$= 1750 \text{ J}$$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $W_F \rightarrow$ आयत AGHI का क्षेत्रफल

$$W_f = (-50) \times 20$$
$$= -1000 \text{J}$$

यहाँ क्षेत्रफल का बल-अक्ष के ऋणात्मक दिशा की ओर होने से, क्षेत्रफल का चिह्न ऋणात्मक है। ◀

5.6 परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय

हम परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय को सिद्ध करने के लिए कार्य और गतिज ऊर्जा की धारणाओं से भलीभांति परिचित हैं। यहाँ हम कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एकविमीय पक्ष तक ही विचार को सीमित करेंगे। गतिज ऊर्जा परिवर्तन की दर है :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m v^2$$

$$= m\frac{dv}{dt}v$$

$$= Fv \text{ (न्यूटन के दूसरे नियमानुसार } = m\frac{dv}{dt} = F)$$

$$= F\frac{dx}{dt}$$

अतः $dK = Fdx$

प्रारंभिक स्थिति x_i से अंतिम स्थिति x_f तक समाकलन करने पर,

$$\int_{K_i}^{K_f} dK = \int_{x_i}^{x_f} Fdx$$

जहाँ x_i और x_f के संगत K_i और K_f क्रमशः प्रारंभिक एवं अंतिम गतिज ऊर्जाएँ हैं।

या $$K_f - K_i = \int_{x_i}^{x_f} F dx \qquad (5.8 \text{ a})$$

समीकरण (5.7) से प्राप्त होता है

$$K_f - K_i = W \qquad (5.8 \text{ b})$$

इस प्रकार परिवर्ती बल के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय सिद्ध होती है।

हालांकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अनेक प्रकार के प्रश्नों को हल करने में उपयोगी है परंतु यह न्यूटन के द्वितीय नियम की पूर्णरूपेण गतिकीय सूचना का समावेश नहीं करती है। वास्तव में यह न्यूटन के द्वितीय नियम का समाकल रूप है। न्यूटन का द्वितीय नियम किसी क्षण, त्वरण तथा बल के बीच संबंध दर्शाता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय में एक काल के लिए समाकल निहित है। इस दृष्टि से न्यूटन के द्वितीय नियम में निहित कालिक सूचना कार्य ऊर्जा प्रमेय में स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होता। बल्कि एक निश्चित काल के लिए समाकलन के रूप में होता है। दूसरी ध्यान देने की बात यह है कि दो या तीन विमाओं में न्यूटन का द्वितीय नियम सदिश रूप में होता है जबकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय अदिश रूप में होता है।

न्यूटन के द्वितीय नियम में दिशा संबंधित निहित ज्ञान भी कार्य ऊर्जा प्रमेय जैसे- अदिश संबंध में निहित नहीं है।

▶ ***उदाहरण 5.6*** m (=1kg) द्रव्यमान का एक गुटका क्षैतिज सतह पर $\upsilon_i = 2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ की चाल से चलते हुए $x = 0.10$ m से $x = 2.01$m के खुरदरे हिस्से में प्रवेश करता है। गुटके पर लगने वाला मंदक बल (F_r) इस क्षेत्र में x के व्युत्क्रमानुपाती है,

$$F_r = \frac{-k}{x} \quad 0.1 < x < 2.01\mathrm{m}$$

$$= 0 \quad x < 0.1\mathrm{m} \text{ और } x > 2.01\mathrm{m} \text{ के लिए}$$

जहाँ $k = 0.5$J। गुटका जैसे ही खुरदरे हिस्से को पार करता है, इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा और चाल υ_f की गणना कीजिए।

हल समीकरण (5.8 a) से

$$K_f = K_i + \int_{0.1}^{2.01} \frac{(-k)}{x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - k \ln(x) \Big|_{0.1}^{2.01}$$

$$= \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - k \ln(2.01/0.1)$$

$$= 2 - 0.5 \ln(20.1)$$

$$= 2 - 1.5 = 0.5\ \mathrm{J}$$

$$\upsilon_f = \sqrt{2K_f/m} = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

ध्यान दीजिए कि ln आधार e पर किसी संख्या का प्राकृतिक लघुगणक है, न कि आधार 10 पर किसी संख्या का [$\ln X = \log_e X = 2.303 \log_{10} X$] ◀

5.7 स्थितिज ऊर्जा की अभिधारणा

यहाँ 'स्थितिज' शब्द किसी कार्य को करने की संभावना या क्षमता को व्यक्त करता है। स्थितिज ऊर्जा की धारणा 'संग्रहित' ऊर्जा से संबंधित है। किसी खिंचे हुए तीर-कमान के तार (डोरी) की ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा होती है। जब इसे ढीला छोड़ा जाता है तो तीर तीव्र चाल से दूर चला जाता है। पृथ्वी के भूपृष्ठ पर भ्रंश रेखाएँ संपीडित कमानियों के सदृश होती हैं। उनकी स्थितिज ऊर्जा बहुत अधिक होती है। जब ये भ्रंश रेखाएँ फिर से समायोजित हो जाती हैं तो भूकंप आता है। किसी भी पिंड की स्थितिज ऊर्जा (संचित ऊर्जा) उसकी स्थिति या अभिविन्यास के कारण होती है। पिंड को मुक्त रूप से छोड़ने पर इसमें संचित ऊर्जा, गतिज ऊर्जा के रूप में निर्मुक्त होती है। आइए, अब हम स्थितिज ऊर्जा की धारणा को एक निश्चित रूप देते हैं।

पृथ्वी की सतह के समीप m द्रव्यमान की एक गेंद पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल mg है। g को पृथ्वी की सतह के समीप अचर माना जा सकता है । यहाँ समीपता से तात्पर्य यह है कि गेंद की पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h, पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में अति सूक्ष्म है ($h << R_E$), अत: हम पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान में परिवर्तन की उपेक्षा कर सकते हैं।* माना कि गेंद को बिना कोई गति प्रदान किए h ऊँचाई तक ऊपर उठाया जाता है। अत: बाह्य कारक द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य mgh होगा। यह कार्य, स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। किसी पिण्ड की h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा उसी पिण्ड को उसी ऊँचाई तक उठाने में गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किए गए कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है।

$$V(h) = mgh$$

यदि h को परिवर्ती लिया जाता है तो यह सरलता से देखा जा सकता है कि गुरुत्वाकर्षण बल F, h के सापेक्ष $V(h)$ के ऋणात्मक अवकलज के समान है

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} V(h) = -mg$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न प्रदर्शित करता है कि गुरुत्वाकर्षण बल नीचे की ओर है। जब गेंद को छोड़ा जाता है तो यह बढ़ती हुई चाल से नीचे आती है । पृथ्वी की सतह से संघट्ट से पूर्व इसकी चाल शुद्धगतिकी संबंध द्वारा निम्न प्रकार दी जाती है

$$\upsilon^2 = 2gh$$

इसी समीकरण को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = mgh$$

जो यह प्रदर्शित करता है कि जब पिण्ड को मुक्त रूप से छोड़ा जाता है तो पिंड की h ऊँचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा पृथ्वी पर पहुंचने तक स्वत: ही गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है ।

प्राकृतिक नियमानुसार, स्थितिज ऊर्जा की धारणा केवल उन्हीं बलों की श्रेणी में लागू होती है जहाँ बल के विरुद्ध किया गया कार्य, ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है और जो बाह्य कारक के हट जाने पर स्वत: गतिज ऊर्जा के रूप में दिखाई पड़ती है। गणितानुसार स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को (सरलता के लिए एक-विमा में)

* गुरुत्वीय त्वरण g के मान में ऊंचाई के साथ परिवर्तन पर विचार गुरुत्वाकर्षण (अध्याय 7) में करेंगे ।

परिभाषित किया जाता है यदि $F(x)$ बल को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

यह निरूपित करता है कि

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{V_i}^{V_f} dV = V_i - V_f$$

किसी संरक्षी बल जैसे गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य पिण्ड की केवल आरंभिक तथा अंतिम स्थिति पर निर्भर करता है। पिछले अध्याय में हमने आनत समतल से संबंधित उदाहरणों का अध्ययन किया। यदि m द्रव्यमान का कोई पिण्ड h ऊंचाई के चिकने (घर्षणरहित) आनत तल के शीर्ष से विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो आनत समतल के अधस्तल (तली) पर इसकी चाल, आनति (झुकाव) कोण का ध्यान रखे बिना $\sqrt{2gh}$ होती है। इस प्रकार यहां पर पिण्ड mgh गतिज ऊर्जा प्राप्त कर लेता है। यदि किया गया कार्य या गतिज ऊर्जा दूसरे कारकों, जैसे पिण्ड के वेग या उसके द्वारा चले गए विशेष पथ की लंबाई पर निर्भर करता है तब यह बल असंरक्षी होता है।

कार्य या गतिज ऊर्जा के सदृश स्थितिज ऊर्जा की विमा $[ML^2T^{-2}]$ और SI मात्रक जूल (J) है। याद रखिए कि संरक्षी बल के लिए, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन ΔV बल द्वारा किए गए ऋणात्मक कार्य के बराबर होता है।

$$\Delta V = -F(x)\,\Delta x \qquad (5.9)$$

इस अनुभाग में गिरती हुई गेंद के उदाहरण में हमने देखा कि किस प्रकार गेंद की स्थितिज ऊर्जा उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो गई थी। यह यांत्रिकी में संरक्षण के महत्त्वपूर्ण सिद्धांत की ओर संकेत करता है जिसे हम अब परखेंगे।

5.8 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण

सरलता के लिए, हम इस महत्त्वपूर्ण सिद्धांत का एकविमीय गति के लिए निदर्शन कर रहे हैं। मान लीजिए कि किसी पिण्ड का संरक्षी बल F के कारण विस्थापन Δx होता है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, किसी बल F के लिए

$$\Delta K = F(x)\,\Delta x$$

संरक्षी बल के लिए स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x)$ को निम्न रूप से परिभाषित किया जा सकता है :

$$-\Delta V = F(x)\Delta x$$

उपरोक्त समीकरण निरूपित करती है कि

$$\Delta K + \Delta V = 0$$

$$\Delta(K + V) = 0 \qquad (5.10)$$

इसका अर्थ है कि किसी पिण्ड की गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं का योगफल, $K + V$ अचर होता है। इससे तात्पर्य है कि संपूर्ण पथ x_i से x_f के लिए

$$K_i + V(x_i) = K_f + V(x_f) \qquad (5.11)$$

यहाँ राशि $K + V(x)$, निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा कहलाती है। पृथक रूप से, गतिज ऊर्जा K और स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक परिवर्तित हो सकती है परंतु इनका योगफल अचर रहता है। उपरोक्त विवेचन से शब्द 'संरक्षी बल' की उपयुक्तता स्पष्ट होती है।

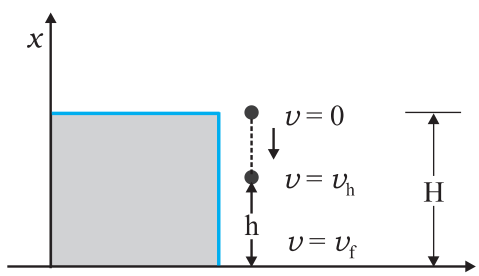
आइए, अब हम संक्षेप में संरक्षी बल की विभिन्न परिभाषाओं पर विचार करते हैं।

- कोई बल $F(x)$ संरक्षी है यदि इसे समीकरण (5.9) के प्रयोग द्वारा अदिश राशि $V(x)$ से प्राप्त कर सकते हैं। त्रिविमीय व्यापकीकरण के लिए सदिश अवकलज विधि का प्रयोग करना पड़ता है जो इस पुस्तक के विवेचना क्षेत्र से बाहर है।
- संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है जो निम्न संबंध से स्पष्ट है :
  $W = K_f - K_i = V(x_i) - V(x_f)$
- तीसरी परिभाषा के अनुसार, इस बल द्वारा बंद पथ में किया गया कार्य शून्य होता है।

यह एक बार फिर समीकरण (5.11) से स्पष्ट है, क्योंकि $x_i = x_f$ है।

अत: यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार ***किसी भी निकाय की कुल यान्त्रिक ऊर्जा अचर रहती है यदि उस पर कार्य करने वाले बल संरक्षी हैं।***

उपरोक्त विवेचना को अधिक मूर्त बनाने के लिए, एक बार फिर गुरुत्वाकर्षण बल के उदाहरण पर विचार करते हैं और स्प्रिंग बल के उदाहरण पर अगले अनुभाग में विचार करेंगे। चित्र 5.5 H ऊँचाई की किसी चट्टान से गिराई, m द्रव्यमान की गेंद का चित्रण करता है।



चित्र 5.5 H ऊँचाई की किसी चट्टान से गिराई गई, m द्रव्यमान की गेंद की स्थितिज ऊर्जा का गतिज ऊर्जा में रूपांतरण।

गेंद की निदर्शित ऊँचाई, शून्य (भूमितल), h और H के संगत कुल यांत्रिक ऊर्जाएँ क्रमशः E_o, E_h और E_H हैं

$$E_H = mgH \quad (5.11a)$$

$$E_h = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2 \quad (5.11b)$$

$$E_0 = (1/2)\,mv_f^2 \quad (5.11c)$$

अचर बल, त्रिविम-निर्भर बल $F(x)$ का एक विशेष उदाहरण है। अतः यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित है। इस प्रकार

$$E_H = E_0$$

अथवा, $mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$

$$v_f = \sqrt{2gH}$$

उपरोक्त परिणाम अनुभाग 5.7 में मुक्त रूप से गिरते हुए पिण्ड के वेग के लिए प्राप्त किया गया था।

इसके अतिरिक्त

$$E_H = E_h$$

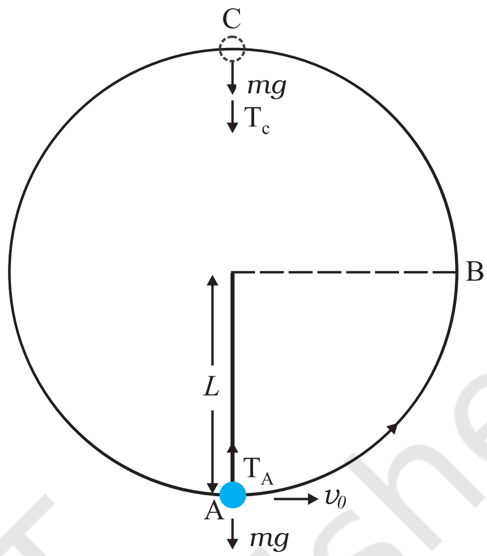
जो इंगित करता है कि

$$v_h^2 = 2g(H - h) \quad (5.11d)$$

उपरोक्त परिणाम, शुद्धगतिकी का एक सुविदित परिणाम है।

H ऊँचाई पर, पिण्ड की ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा है। यह h ऊँचाई पर आंशिक रूप से गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है तथा भूमि तल पर पूर्णरूपेण गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है। इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण, यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को स्पष्ट करता है।

उदाहरण 5.7 m द्रव्यमान का एक गोलक L लंबाई की हलकी डोरी से लटका हुआ है। इसके निम्नतम बिंदु A पर क्षैतिज वेग v_o इस प्रकार लगाया जाता है कि यह ऊर्ध्वाधर तल में अर्धवृत्ताकार प्रक्षेप्य पथ को इस प्रकार तय करता है कि डोरी केवल उच्चतम बिंदु C पर ढीली होती है जैसा कि चित्र 5.6 में दिखाया गया है। निम्न राशियों के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए : (*a*) v_0, (*b*) बिंदुओं B तथा C पर गोलक की चाल, तथा (*c*) बिंदु B तथा C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात (K_B/K_C)। गोलक के बिंदु C पर पहुंचने के बाद पथ की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।



चित्र 5.6

हल (*a*) यहाँ गोलक पर लगने वाले दो बाह्य बल हैं-गुरुत्व बल और डोरी में तनाव (T)। बाद वाला बल (तनाव) कोई कार्य नहीं करता है क्योंकि गोलक का विस्थापन हमेशा डोरी के लंबवत् है। अतः गोलक की स्थितिज ऊर्जा केवल गुरुत्वाकर्षण बल से संबंधित है। निकाय की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर है। हम निकाय की स्थितिज ऊर्जा निम्नतम बिंदु A पर शून्य ले लेते हैं। अतः बिंदु A पर

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (5.12)$$

$$T_A - mg = \frac{mv_0^2}{L}$$ [न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार]

यहाँ T_A, बिंदु A पर डोरी का तनाव है। उच्चतम बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है; अतः यहाँ बिंदु C पर डोरी का तनाव $T_C = 0$। अतः बिंदु C पर हमें प्राप्त होता है

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2 + 2mgL \quad (5.13)$$

$$mg = \frac{mv_c^2}{L}$$ [न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार] (5.14)

जहाँ v_c बिंदु C पर गोलक की चाल है। समीकरण (5.13) व (5.14) से प्राप्त होता है

$$E = \frac{5}{2}mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा से समीकृत करने पर

$$\frac{5}{2}mgL = \frac{m}{2}v_0^2$$

अथवा $v_0 = \sqrt{5gL}$

(b) समीकरण (5.14) से यह स्पष्ट है कि

$$v_C = \sqrt{gL}$$

अतः बिंदु B पर ऊर्जा है

$$E = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgL$$

इसे बिंदु A पर ऊर्जा के व्यंजक के बराबर रखने पर और (a) के परिणाम $v^2{}_0 = 5gL$ प्रयोग में लाने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= \frac{5}{2}m\,g\,L$$

$$\therefore v_B = \sqrt{3gL}$$

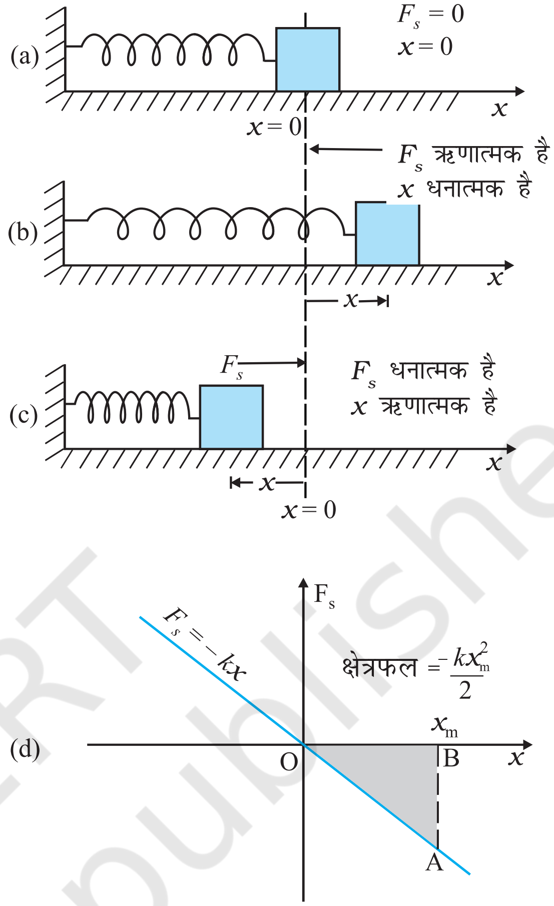
(c) बिंदु B व C पर गतिज ऊर्जाओं का अनुपात

$$\frac{K_B}{K_C} = \frac{\frac{1}{2}mv_B^2}{\frac{1}{2}mv_C^2} = \frac{3}{1}$$

बिंदु C पर डोरी ढीली हो जाती है और गोलक का वेग बाईं ओर को एवं क्षैतिज हो जाता है। यदि इस क्षण पर डोरी को काट दिया जाए तो गोलक एक क्षैतिज प्रक्षेप की भांति प्रक्षेप्य गति ठीक उसी प्रकार दर्शाएगा जैसा कि खड़ी चट्टान से क्षैतिज दिशा में किसी पत्थर को फेंकने पर होता है। अन्यथा गोलक लगातार अपने वृत्ताकार पथ पर गति करता रहेगा और परिक्रमण को पूर्ण करेगा। ◂

5.9 किसी स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा

कोई स्प्रिंग-बल एक परिवर्ती-बल का उदाहरण है जो संरक्षी होता है। चित्र 5.7 स्प्रिंग से संलग्न किसी गुटके को दर्शाता है जो किसी चिकने क्षैतिज पृष्ठ पर विरामावस्था में है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा किसी दृढ़ दीवार से जुड़ा है। स्प्रिंग हलका है और द्रव्यमान-रहित माना जा सकता है। किसी आदर्श स्प्रिंग में, स्प्रिंग-बल F_s, गुटके का अपनी साम्यावस्था स्थिति से विस्थापन x के समानुपाती होता है। गुटके का साम्यावस्था से विस्थापन धनात्मक (चित्र 5.7b) या ऋणात्मक (चित्र 5.7c) हो सकता है। स्प्रिंग के लिए बल का नियम, हुक का नियम कहलाता है और गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :



चित्र 5.7 किसी स्प्रिंग के मुक्त सिरे से जुड़े हुए गुटके पर स्प्रिंग-बल का निदर्शन

(a) जब माध्य स्थिति से विस्थापन x शून्य है तो स्प्रिंग बल F_s भी शून्य है ।

(b) खिंचे हुए स्प्रिंग के लिए $x > 0$ और $F_s < 0$

(c) संपीडित स्प्रिंग के लिए $x < 0$ और $F_s > 0$

(d) F_s तथा x के बीच खींचा गया आलेख । छायांकित त्रिभुज का क्षेत्रफल स्प्रिंग-बल द्वारा किए गए कार्य को निरूपित करता है। F_s और x के विपरीत चिह्नों के कारण, किया गया कार्य ऋणात्मक है,

$$W_s = -kx_m^2 / 2$$

$$F_s = -kx$$

जहाँ नियतांक k एक स्प्रिंग नियतांक है जिसका मात्रक $N\,m^{-1}$ है। यदि k का मान बहुत अधिक है, तब स्प्रिंग को दृढ़ कहा जाता है। यदि k का मान कम है, तब इसे नर्म (मृदु) कहा जाता है।

मान लीजिए कि हम गुटके को बाहर की तरफ, जैसा कि चित्र 5.7(b) में दिखाया गया है, धीमी अचर चाल से खींचते हैं। यदि स्प्रिंग का खिंचाव x_m है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया कार्य

$$W = \int_0^{x_m} F_s \, dx = -\int_0^{x_m} kx \, dx$$

$$= -\frac{k x_m^2}{2} \quad (5.15)$$

इस व्यंजक को हम चित्र 5.7(d) में दिखाए गए त्रिभुज के क्षेत्रफल से भी प्राप्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि बाह्य खिंचाव बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है।

$$W = +\frac{k x_m^2}{2} \quad (5.16)$$

यदि स्प्रिंग का विस्थापन x_c (<0) से संपीडित किया जाता है तब भी उपरोक्त व्यंजक सत्य है। स्प्रिंग-बल $W_s = -kx_c^2/2$ कार्य करता है जबकि बाह्य बल $W = -kx_c^2/2$ कार्य करता है।

यदि गुटके को इसके आरंभिक विस्थापन x_i से अंतिम विस्थापन x_f तक विस्थापित किया जाता है तो स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} k\,x\,dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_f^2}{2} \quad (5.17)$$

अत: स्प्रिंग-बल द्वारा किया गया कार्य केवल सिरे के बिंदुओं पर निर्भर करता है। विशेष रूप से जब गुटके को स्थिति x_i से खीचा गया हो और वापस x_i स्थिति तक आने दिया गया हो तो

$$W_s = -\int_{x_i}^{x_f} k\,x\,dx = \frac{k\,x_i^2}{2} - \frac{k\,x_f^2}{2} = 0 \quad (5.18)$$

अत: स्प्रिंग बल द्वारा किसी चक्रीय प्रक्रम में किया गया कार्य शून्य होता है। हमने यहां स्पष्ट कर दिया है कि (i) स्प्रिंग बल केवल स्थिति पर निर्भर करता है जैसा कि हुक द्वारा पहले कहा गया है *($F_s = -k\,x$)*; (ii) यह बल कार्य करता है जो किसी पिण्ड की आरंभिक एवं अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है; उदाहरणार्थ, समीकरण (5.17) । अत: स्प्रिंग बल एक **संरक्षी बल** है।

जब गुटका साम्यावस्था में है अर्थात् माध्य स्थिति से उसका विस्थापन शून्य है तब स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $V(x)$ को हम शून्य मानते हैं। किसी खिंचाव (या संपीडन) x के लिए उपरोक्त विश्लेषण सुझाता है कि

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.19)$$

इसे सुविधापूर्वक सत्यापित किया जा सकता है कि $-dV/dx = -k\,x$ जो कि स्प्रिंग बल है। जब m द्रव्यमान के गुटके को चित्र 5.7 के अनुसार x_m तक खींचा जाता है और फिर विरामावस्था से छोड़ा जाता है, तब इसकी समूची यांत्रिक ऊर्जा स्वेच्छा से चुनी गई किसी भी स्थिति x पर निम्नलिखित रूप में दी जाएगी, जहाँ x का मान $-x_m$ से $+x_m$ के बीच है:

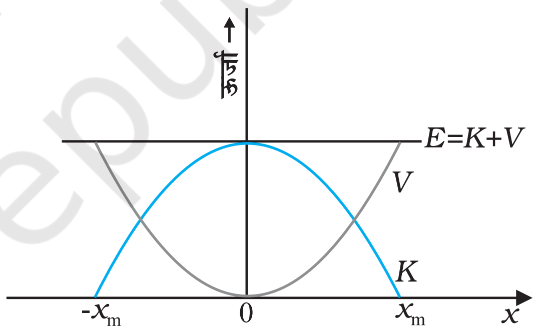
$$\frac{1}{2}k\,x_m^2 = \frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}m\,v^2$$

जहाँ हमने यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण नियम का उपयोग किया है । इसके अनुसार गुटके की चाल v_m और गतिज ऊर्जा साम्यावस्था $x = 0$ पर अधिकतम होगी, अर्थात्

$$\frac{1}{2}m\,v_m^2 = \frac{1}{2}k\,x_m^2$$

या, $$v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_m$$

ध्यान दीजिए कि k/m की विमा $[T^{-2}]$ है और यह समीकरण विमीय रूप से सही है। यहाँ निकाय की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में, और स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है, तथापि कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है । चित्र 5.8 में इसका ग्राफीय निरूपण किया गया है।



चित्र 5.8 *किसी स्प्रिंग से जुड़े हुए गुटके की स्थितिज ऊर्जा V और गतिज ऊर्जा K के परवलयिक आलेख जो हुक के नियम का पालन करते हैं। ये एक-दूसरे के पूरक हैं अर्थात् इनमें जब एक घटता है तो दूसरा बढ़ता है, परंतु कुल यांत्रिक ऊर्जा E = K + V हमेशा अचर रहती है।*

▶ **उदाहरण 5.8** कार दुर्घटना को दिखाने के लिए (अनुकार) मोटरकार निर्माता विभिन्न स्प्रिंग नियतांकों के स्प्रिंगों का फ्रेम चढ़ाकर चलती हुई कारों के संघट्ट का अध्ययन करते हैं। मान लीजिए किसी प्रतीकात्मक अनुरूपण में कोई 1000kg द्रव्यमान की कार एक चिकनी सड़क पर 18 km/h की चाल से चलते हुए, क्षैतिज फ्रेम पर चढ़ाए गए स्प्रिंग से संघट्ट करती है जिसका स्प्रिंग नियतांक $5.25 \times 10^3\ N\,m^{-1}$ है। स्प्रिंग का अधिकतम संपीडन क्या होगा?

हल कार की गतिज ऊर्जा अधिकतम संपीडन पर संपूर्ण रूप से स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। गतिमान कार की गतिज ऊर्जा :

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times 5 \times 5$$

$$K = 1.25 \times 10^4 \, J$$

जहाँ कार की चाल $18 \, km \, h^{-1}$ को इसके SI मान $5 \, m \, s^{-1}$ में परिवर्तित कर दिया गया है। [**यहाँ यह ध्यान रखने योग्य है कि $36 \, km \, h^{-1} = 10 \, m \, s^{-1}$**]। यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार अधिकतम संपीडन x_m पर स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (V), गतिशील कार की गतिज ऊर्जा (K) के बराबर होती है।

अतः $$V = \frac{1}{2} k \, x_m^2$$

$$= 1.25 \times 10^4 \, J$$

हल करने पर हम प्राप्त करते हैं कि $x_m = 2.00 \, m$

ध्यान दें कि यहाँ इस स्थिति को हमने आदर्श रूप में प्रस्तुत किया है। यहाँ स्प्रिंग को द्रव्यमानरहित माना है और सड़क का घर्षण नगण्य लिया है। ◀

हम संरक्षी बलों पर कुछ टिप्पणी करते हुए इस अनुभाग का समापन करते हैं :

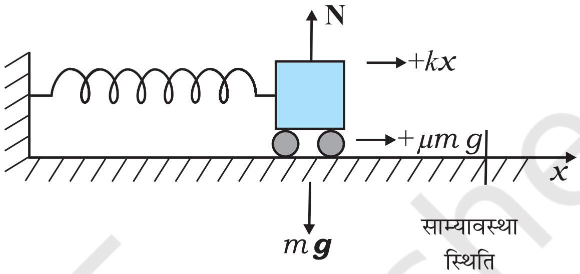
(i) उपरोक्त विवेचना में समय के विषय में कोई सूचना नहीं है। इस उदाहरण में हम संपीडन का परिकलन कर सकते हैं लेकिन उस समय अंतराल का परिकलन नहीं कर सकते जिसमें यह संपीडन हुआ है। अत: कालिक सूचना प्राप्त करने के लिए, इस निकाय के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम के हल की आवश्यकता है।

(ii) सभी बल संरक्षी नहीं हैं। उदाहरणार्थ, घर्षण एक असंरक्षी बल है। इस स्थिति में, ऊर्जा-संरक्षण नियम में किंचित परिवर्तन करना पड़ेगा। इसे उदाहरण 5.9 में स्पष्ट किया गया है।

(iii) स्थितिज ऊर्जा का शून्य स्वेच्छा से लिया गया है जिसे सुविधानुसार निश्चित कर लिया जाता है। स्प्रिंग-बल के लिए, $x = 0$ पर हम $V = 0$ लेते हैं, अर्थात् बिना खिंचे स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा शून्य थी। नियत गुरुत्वाकर्षण बल mg के लिए हमने पृथ्वी की सतह पर $V = 0$ लिया था। अगले अध्याय में हम देखेंगे कि गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियमानुसार बल के लिए, गुरुत्वाकर्षण स्रोत से अनन्त दूरी पर शून्य सर्वोत्तम रूप से परिभाषित होती है तथापि, किसी विवेचना में स्थितिज ऊर्जा के लिए एक बार शून्य की स्थिति निश्चित करने के पश्चात्, शुरू से अंत तक विवेचना में उसी नियम का पालन करना चाहिए।

▶ **उदाहरण 5.9** उदाहरण 5.8 में घर्षण गुणांक μ का मान 0.5 लेकर कमानी के अधिकतम संपीडन का परिकलन कीजिए।

हल : स्प्रिंग बल और घर्षण बल, दोनों ही संपीडन का विरोध करने में संयुक्त रूप से कार्य करते हैं, जैसा कि चित्र 5.9 में दिखाया गया है।



चित्र 5.9 किसी कार पर आरोपित बल।

यहाँ हम यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के बजाय कार्य-ऊर्जा प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन है :

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

कुल बल द्वारा किया गया कार्य :

$$W = -\frac{1}{2} k x_m^2 - \mu m \, g \, x_m$$

ΔK और W को समीकृत करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k \, x_m^2 + \mu m \, g \, x_m$$

यहाँ $\mu \, mg = 0.5 \times 10^3 \times 10 = 5 \times 10^3 \, N$ ($g = 10 \, m \, s^{-2}$ लेने पर)। उपरोक्त समीकरण को व्यवस्थित करने पर हमें अज्ञात x_m के लिए निम्न द्विघातीय समीकरण प्राप्त होती है :

$$k \, x_m^2 + 2\mu m \, g \, x_m - m \, v^2 = 0$$

$$x_m = \frac{-\mu \, m \, g + \left[\mu^2 m^2 g^2 + m \, k \, v^2\right]^{1/2}}{k}$$

जहाँ हमने x_m धनात्मक होने के कारण इसका धनात्मक वर्गमूल ले लिया है। आंकिक मानों को समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_m = 1.35 \, m$$

जो आशानुसार उदाहरण 5.8 में प्राप्त परिणाम से कम है। ◀

यदि मान लें कि पिंड पर लगने वाले दोनों बलों में एक संरक्षी बल F_c और दूसरा असंरक्षी बल F_{nc} है तो यांत्रिक

ऊर्जा-संरक्षण के सूत्र में किंचित् परिवर्तन करना पड़ेगा। कार्य-ऊर्जा प्रमेय से :

$$(F_c + F_{nc})\,\Delta x = \Delta K$$

परंतु $$F_c\,\Delta x = -\,\Delta V$$

अतः $$\Delta(K + V) = F_{nc}\,\Delta x$$

$$\Delta E = F_{nc}\,\Delta x$$

जहाँ E कुल यांत्रिक ऊर्जा है। समस्त पथ पर यह निम्न रूप ले लेती है

$$E_f - E_i = W_{nc}$$

जहाँ W_{nc} असंरक्षी बल द्वारा किसी पथ पर किया गया कुल कार्य है। ध्यान दीजिए कि W_{nc} i से f तक एक विशेष पथ पर निर्भर करता है जैसा कि संरक्षी बल में नहीं है।

5.10 शक्ति

बहुधा केवल यह जानना ही पर्याप्त नहीं है कि किसी पिंड पर कितना कार्य किया गया अपितु यह जानना भी आवश्यक है कि यह कार्य किस दर से किया गया है। हम कहते हैं कि व्यक्ति शारीरिक रूप से स्वस्थ है यदि वह केवल किसी भवन के चार तल तक चढ़ ही नहीं जाता है अपितु वह इन पर तेजी से चढ़ जाता है । अतः **शक्ति** को उस समय-दर से परिभाषित करते हैं जिससे कार्य किया गया या ऊर्जा स्थानांतरित हुई। किसी बल की औसत शक्ति उस बल द्वारा किए गए कार्य W और उसमें लगे समय t के अनुपात से परिभाषित करते हैं। अतः

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

तात्क्षणिक शक्ति को औसत शक्ति के सीमान्त मान के रूप में परिभाषित करते हैं जबकि समय शून्य की ओर अग्रसर हो रहा होता है, अर्थात्

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{5.20}$$

जहाँ विस्थापन $\mathrm{d}\mathbf{r}$ में बल $\mathbf{F}$ द्वारा किया गया कार्य $\mathrm{d}W = \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r}$ होता है। अतः तात्क्षणिक शक्ति को निम्नलिखित प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं :

$$P = \mathbf{F}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \mathbf{F}.\mathbf{v} \tag{5.21}$$

जहाँ $\mathbf{v}$ तात्क्षणिक वेग है जबकि बल $\mathbf{F}$ है।

कार्य और ऊर्जा की भांति शक्ति भी एक अदिश राशि है। इसका SI मात्रक वाट (W) और विमा $[ML^2T^{-3}]$ है। 1W का मान $1\,J\,s^{-1}$ के बराबर होता है। अठारहवीं शताब्दी में भाप इंजन के प्रवर्तकों में से एक प्रवर्तक जेम्स वॉट के नाम पर शक्ति का मात्रक वाट (W) रखा गया है।

शक्ति का बहुत पुराना मात्रक अश्व शक्ति है।

1 अश्व शक्ति (hp) = 746 W

यह मात्रक आज भी कार, मोटरबाईक इत्यादि की निर्गत क्षमता को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त होता है।

जब हम विद्युत उपकरण; जैसे–विद्युत बल्ब, हीटर और प्रशीतक आदि खरीदते हैं तो हमें मात्रक वाट से व्यवहार करना होता है । एक 100 वाट का बल्ब 10 घंटे में एक किलोवाट-घंटा विद्युत ऊर्जा की खपत करता है।

अर्थात् 100 (वाट) × 10 (घंटा)
=1000 वाट-घंटा
= 1 किलोवाट घंटा (k Wh)
= 10^3 (W) × 3600 (s)
= 3.6×10^6 J

विद्युत-ऊर्जा की खपत के लिए मूल्य, मात्रक kW h में चुकाया जाता है जिसे साधारणतया 'यूनिट' के नाम से पुकारते हैं। ध्यान दें कि kWh ऊर्जा का मात्रक है, न कि शक्ति का।

▶ ***उदाहरण 5.10*** कोई लिफ्ट जिसका कुल द्रव्यमान (लिफ्ट + यात्रियों का) 1800 kg है, ऊपर की ओर $2\ m\ s^{-1}$ की अचर चाल से गतिमान है। 4000 N का घर्षण बल इसकी गति का विरोध करता है। लिफ्ट को मोटर द्वारा प्रदत्त न्यूनतम शक्ति का आकलन वाट और अश्व शक्ति में कीजिए ।

हल लिफ्ट पर लगने वाला अधोमुखी बल

$$F = mg + F_f = (1800 \times 10) + 4000 = 22000\ \mathrm{N}$$

इस बल को संतुलित करने के लिए मोटर द्वारा पर्याप्त शक्ति की आपूर्ति की जानी चाहिए।

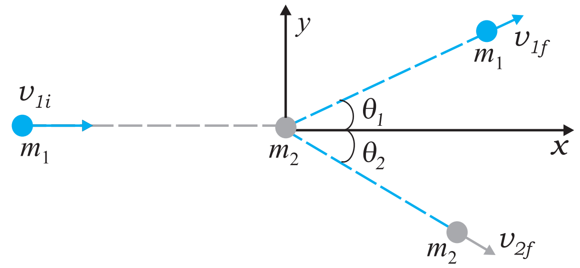
अतः $P = \mathbf{F}.\mathbf{v} = 22000 \times 2 = 44000\ \mathrm{W} = 59\ \mathrm{hp}$ ◀

5.11 संघट्ट

भौतिकी में हम गति (स्थान में परिवर्तन) का अध्ययन करते हैं। साथ ही साथ हम ऐसी भौतिक राशियों की खोज करते हैं जो किसी भौतिक प्रक्रम में परिवर्तित नहीं होती हैं। ऊर्जा-संरक्षण एवं संवेग-संरक्षण के नियम इसके अच्छे उदाहरण हैं। इस अनुभाग में, हम इन नियमों का बहुधा सामने आने वाली परिघटनाओं, जिन्हें संघट्ट कहते हैं, में प्रयोग करेंगे। विभिन्न खेलों; जैसे–बिलियर्ड, मारबल या कैरम आदि में संघट्ट एक अनिवार्य घटक है। अब हम किन्हीं दो द्रव्यमानों का आदर्श रूप में प्रस्तुत संघट्ट का अध्ययन करेंगे।

मान लीजिए कि दो द्रव्यमान m_1 व m_2 हैं जिसमें कण m_1 चाल v_{1i} से गतिमान है जहाँ अधोलिखित 'i' आरंभिक चाल को निरूपित करता है। दूसरा द्रव्यमान m_2 स्थिर है। इस निर्देश

फ्रेम का चयन करने में व्यापकता में कोई कमी नहीं आती। इस फ्रेम में द्रव्यमान m_1, दूसरे द्रव्यमान m_2 से जो विरामावस्था में है, संघट्ट करता है जो चित्र 5.10 में चित्रित किया गया है। संघट्ट के पश्चात् द्रव्यमान m_1 व m_2 विभिन्न दिशाओं में गति करते हैं। हम देखेंगे कि द्रव्यमानों, उनके वेगों और कोणों में निश्चित संबंध है।



चित्र 5.10 किसी द्रव्यमान m_1 का अन्य स्थिर द्रव्यमान m_2 से संघट्ट।

5.11.1 प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ संघट्ट

सभी संघट्टों में निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत रहता है अर्थात् निकाय का आरंभिक संवेग उसके अंतिम संवेग के बराबर होता है। इसे निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है। जब दो पिंड संघट्ट करते हैं तो संघट्ट समय Δt में कार्यरत परस्पर आवेगी बल, उनके परस्पर संवेगों में परिवर्तन लाने का कारण होते हैं। अर्थात्

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{12} \Delta t$$
$$\Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{21} \Delta t$$

जहाँ $\mathbf{F}_{12}$ दूसरे पिंड द्वारा पहले पिंड पर आरोपित बल है। इसी तरह $\mathbf{F}_{21}$ पहले पिंड द्वारा दूसरे पिंड पर आरोपित बल है। न्यूटन के गति के तृतीय नियमानुसार $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ होता है। यह दर्शाता है कि

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

यदि बल संघट्ट समय Δt के दौरान जटिल रूप से परिवर्तित हो रहे हों तो भी उपरोक्त परिणाम सत्य हैं। चूंकि न्यूटन का तृतीय नियम प्रत्येक क्षण पर सत्य है अत: पहले पिंड पर आरोपित कुल आवेग, दूसरे पिंड पर आरोपित आवेग के बराबर परंतु विपरीत दिशा में होगा।

दूसरी ओर निकाय की कुल गतिज ऊर्जा आवश्यक रूप से संरक्षित नहीं रहती है। संघट्ट के दौरान टक्कर और विकृति, ऊष्मा और ध्वनि उत्पन्न करते हैं। आरंभिक गतिज ऊर्जा का कुछ अंश ऊर्जा के दूसरे रूपों में रूपान्तरित हो जाता है। यदि उपरोक्त दोनों द्रव्यमानों को जोड़ने वाली 'स्प्रिंग' बिना किसी ऊर्जा-क्षति के अपनी मूल आकृति प्राप्त कर लेती है, जो पिंडों की आरंभिक गतिज ऊर्जा उनकी अंतिम गतिज ऊर्जा के बराबर होगी परंतु संघट्ट काल Δt के दौरान अचर नहीं रहती। इस प्रकार के संघट्ट को **प्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं। दूसरी ओर यदि विकृति दूर नहीं होती है और दोनों पिंड संघट्ट के पश्चात् आपस में सटे रहकर गति करें तो इस प्रकार के संघट्ट को **पूर्णत: अप्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं। इसके अतिरिक्त मध्यवर्ती स्थिति आमतौर पर देखने को मिलती है जब विकृति आंशिक रूप से कम हो जाती है और प्रारंभिक गतिज ऊर्जा की आंशिक रूप से क्षति हो जाती है। इसे समुचित रूप से **अप्रत्यास्थ संघट्ट** कहते हैं।

5.11.2 एकविमीय संघट्ट

सर्वप्रथम हम किसी पूर्णत: अप्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति का अध्ययन करते हैं। चित्र 5.10 में

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \quad \text{(संवेग संरक्षण के नियम से)}$$

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \tag{5.22}$$

संघट्ट में गतिज ऊर्जा की क्षति:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 \quad \text{[समीकरण (5.22) द्वारा]}$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2$$

जो कि अपेक्षानुसार एक धनात्मक राशि है।

आइए, अब प्रत्यास्थ संघट्ट की स्थिति का अध्ययन करते हैं। उपरोक्त नामावली के प्रयोग के साथ $\theta_1 = \theta_2 = 0$ लेने पर, रेखीय संवेग एवं गतिज ऊर्जा के संरक्षण की समीकरण निम्न है:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{5.23}$$

$$m_1 v_{1i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \tag{5.24}$$

समीकरण (5.23) और समीकरण (5.24) से हम प्राप्त करते हैं

$$m_1 v_{1i}(v_{2f} - v_{1i}) = m_1 v_{1f}(v_{2f} - v_{1f})$$

अथवा,

$$v_{2f}(v_{1i} - v_{1f}) = v_{1i}^2 - v_{1f}^2$$
$$= (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$$

अत: $$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} \tag{5.25}$$

इसे समीकरण (5.23) में प्रतिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{1i} \tag{5.26}$$

तथा $$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \tag{5.27}$$

इस प्रकार 'अज्ञात राशियाँ' $\{v_{1f}, v_{2f}\}$ ज्ञात राशियों $\{m_1, m_2, v_{1i}\}$ के पदों में प्राप्त हो गई हैं। आइए, अब उपरोक्त विश्लेषण से विशेष दशाओं में रुचिकर निष्कर्ष प्राप्त करते हैं ।

दशा I : यदि दोनों द्रव्यमान समान हैं, अर्थात् $m_1 = m_2$, तब

$$v_{1f} = 0, \quad v_{2f} = v_{1i}$$

अर्थात् प्रथम द्रव्यमान विरामावस्था में आ जाता है और संघट्ट के पश्चात् दूसरा द्रव्यमान, प्रथम द्रव्यमान का आरंभिक वेग प्राप्त कर लेता है।

दशा II : यदि एक पिंड का द्रव्यमान दूसरे पिंड के द्रव्यमान से बहुत अधिक है, अर्थात् $m_2 >> m_1$, तब

$$v_{1f} \simeq -v_{1i} \qquad v_{2f} \simeq 0$$

भारी द्रव्यमान स्थिर रहता है जबकि हलके द्रव्यमान का वेग उत्क्रमित हो जाता है।

▶ ***उदाहरण 5.11* गतिशील न्यूट्रॉनों का मंदन :** किसी नाभिकीय रिऐक्टर में तीव्रगामी न्यूट्रॉन (विशिष्ट रूप से वेग 10^7 m s^{-1}) को 10^3 m s^{-1} के वेग तक मंदित कर दिया जाना चाहिए ताकि नाभिकीय विखंडन अभिक्रिया में न्यूट्रॉन की यूरेनियम के समस्थानिक $^{235}_{92}U$ से अन्योन्यक्रिया करने की प्रायिकता उच्च हो जाए। सिद्ध कीजिए कि न्यूट्रॉन एक हलके नाभिक, जैसे ड्यूटीरियम या कार्बन जिसका द्रव्यमान न्यूट्रॉन के द्रव्यमान का मात्र कुछ गुना है, से प्रत्यास्थ संघट्ट करने में अपनी अधिकांश गतिज ऊर्जा की क्षति कर देता है। ऐसे पदार्थ प्राय: भारी जल (D_2O) अथवा ग्रेफाइट, जो न्यूट्रॉनों की गति को मंद कर देते हैं, 'मंदक' कहलाते हैं ।

हल न्यूट्रॉन की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा है

$$K_{1i} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

जबकि समीकरण (5.26) से इसकी अंतिम गतिज ऊर्जा है

$$K_{1f} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 \quad = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2$$

क्षयित आंशिक गतिज ऊर्जा है

$$f_1 = \frac{K_{1f}}{K_{1i}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

जबकि विमंदक नाभिक K_{2f}/K_{1i} द्वारा भिन्नात्मक गतिज ऊर्जा वृद्धि है ।

$$f_2 = 1 - f_1 \text{ (प्रत्यास्थ संघट्ट)}$$

$$= \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

उपरोक्त परिणाम को समीकरण (5.27) से प्रतिस्थापित करके भी सत्यापित किया जा सकता है।

ड्यूटीरियम के लिए, $m_2 = 2\, m_1$ और हम प्राप्त करते हैं $f_1 = 1/9$, जबकि $f_2 = 8/9$ है। अत: न्यूट्रॉन की लगभग 90% ऊर्जा ड्यूटीरियम को हस्तांतरित हो जाती है। कार्बन के लिए, $f_1 = 71.6\%$ और $f_2 = 28.4\%$ है। हालांकि, व्यवहार में, सीधा संघट्ट विरले ही होने के कारण यह संख्या काफी कम होती है। ◀

यदि दोनों पिंडों के आरंभिक तथा अंतिम वेग एक ही सरल रेखा के अनुदिश कार्य करते हैं तो ऐसे संघट्ट को एकविमीय संघट्ट अथवा **सीधा संघट्ट** कहते हैं। छोटे गोलीय पिंडों के लिए यह संभव है कि पिंड 1 की गति की दिशा विरामावस्था में रखे पिंड 2 के केन्द्र से होकर गुजरे। सामान्यत:, यदि आरंभिक वेग तथा अंतिम वेग एक ही तल में हों तो संघट्ट द्विविमीय कहलाता है।

5.11.3 द्विविमीय संघट्ट

चित्र 5.10 स्थिर द्रव्यमान m_2 से गतिमान द्रव्यमान m_1 का संघट्ट का चित्रण करता है। इस प्रकार के संघट्ट में रेखीय संवेग संरक्षित रहता है। चूंकि संवेग एक सदिश राशि है, अत: यह तीन दिशाओं $\{x, y, z\}$ के लिए तीन समीकरण प्रदर्शित करता है। संघट्ट के पश्चात् m_1 तथा m_2 के अंतिम वेग की दिशाओं के आधार पर समतल का निर्धारण कीजिए और मान लीजिए कि यह x-y समतल है। रेखीय संवेग के z- घटक का संरक्षण यह दर्शाता है कि संपूर्ण संघट्ट x-y समतल में है। x-घटक और y-घटक के समीकरण निम्न हैं :

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2\, v_{2f} \cos \theta_2 \tag{5.28}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \tag{5.29}$$

अधिकतर स्थितियों में यह माना जाता है कि $\{m_1, m_2, v_{1i}\}$ ज्ञात है। अत: संघट्ट के पश्चात्, हमें चार अज्ञात राशियाँ $\{v_{1f}, v_{2f}, \theta_1$ और $\theta_2\}$ प्राप्त होती हैं जबकि हमारे पास मात्र दो समीकरण हैं। यदि $\theta_1 = \theta_2 = 0$, हम पुन: एकविमीय संघट्ट के लिए समीकरण (5.24) प्राप्त कर लेते हैं।

अब यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो,

$$\frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2 \tag{5.30}$$

यह हमें समीकरण (5.28) व (5.29) के अलावा एक और समीकरण देता है लेकिन अभी भी हमारे पास सभी अज्ञात राशियों

का पता लगाने के लिए एक समीकरण कम है। अतः प्रश्न को हल करने के लिए, चार अज्ञात राशियों में से कम से कम एक और राशि, मान लीजिए θ_1, ज्ञात होनी चाहिए। उदाहरणार्थ, कोण θ_1 का निर्धारण संसूचक को कोणीय रीति में x-अक्ष से y-अक्ष तक घुमा कर किया जा सकता है। राशियों $\{m_1, m_2, v_{1i}, \theta_1\}$ के ज्ञात मान से हम समीकरण (5.28)-(5.30) का प्रयोग करके $\{v_{1f}, v_{2f}, \theta_2\}$ का निर्धारण कर सकते हैं।

▶ ***उदाहरण 5.12*** मान लीजिए कि चित्र 5.10 में चित्रित संघट्ट बिलियर्ड की समान द्रव्यमान ($m_1 = m_2$) वाली दो गेंदों के मध्य हुआ है जिसमें प्रथम गेंद क्यू (डण्डा) कहलाती है और द्वितीय गेंद 'लक्ष्य' कहलाती है। खिलाड़ी लक्ष्य गेंद को $\theta_2 = 37°$ के कोण पर कोने में लगी थैली में गिराना चाहता है। यहाँ मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है तथा घर्षण और घूर्णन गति महत्त्वपूर्ण नहीं हैं । कोण θ_1 ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि द्रव्यमान समान हैं अतः संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$

समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर प्राप्त होता है

$$v_{1i}^{\ 2} = \left(\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}\right)\cdot\left(\mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}\right)$$

$$= v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2\mathbf{v}_{1f}.\mathbf{v}_{2f}$$

$$= \left\{ v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} + 2v_{1f}v_{2f} \cos\ (\theta_1 + 37°) \right\} \qquad (5.31)$$

चूंकि संघट्ट प्रत्यास्थ है और द्रव्यमान $m_1 = m_2$ है, गतिज ऊर्जा के सरंक्षण, समीकरण (5.31) से हमें प्राप्त होता है

$$v_{1i}^{\ 2} = v_{1f}^{\ 2} + v_{2f}^{\ 2} \qquad (5.32)$$

उपरोक्त दोनों समीकरणों (5.31) और (5.32) की तुलना करने पर,

$$\cos\ (\theta_1 + 37°) = 0$$

अतः $\quad \theta_1 + 37° = 90°$

अथवा, $\quad \theta_1 = 53°$

इससे सिद्ध होता है कि जब समान द्रव्यमान के दो पिंड जिनमें से एक स्थिर है, पृष्ठसर्पी प्रत्यास्थ संघट्ट करते हैं तो संघट्ट के पश्चात्, दोनों एक-दूसरे से समकोण बनाते हुए गति करेंगे। ◀

यदि हम चिकने पृष्ठ वाले गोलीय द्रव्यमानों पर विचार करें और मान लें कि संघट्ट तभी होता है जब पिंड एक दूसरे को स्पर्श करे तो विषय अत्यंत सरल हो जाता है। मारबल, कैरम तथा बिलियार्ड के खेल में ठीक ऐसा ही होता है।

हमारे दैनिक जीवन में संघट्ट तभी होता है जब दो वस्तुएँ एक दूसरे को स्पर्श करें। लेकिन विचार कीजिए कि कोई धूमकेतु दूरस्थ स्थान से सूर्य की ओर आ रहा है अथवा अल्फा कण किसी नाभिक की ओर आता हुआ किसी दिशा में चला जाता है। यहाँ पर हमारी दूरी पर कार्यरत बलों से सामना होता है। इस प्रकार की घटना को प्रकीर्णन कहते हैं। जिस वेग तथा दिशाओं में दोनों कण गतिमान होंगे वह उनके आरंभिक वेग, उनके द्रव्यमान, आकार तथा आमाप तथा उनके बीच होने वाली अन्योन्य क्रिया के प्रकार पर निर्भर है।

सारांश

1. *कार्य-ऊर्जा प्रमेय* के अनुसार, किसी पिंड की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन उस पर आरोपित कुल बल द्वारा किया गया कार्य है।

$$K_f - K_i = W_{net}$$

2. कोई बल *संरक्षी* कहलाता है यदि (*i*) उसके द्वारा किसी पिंड पर किया गया कार्य पथ पर निर्भर न करके केवल सिरे के बिंदुओं $\{x_i, x_j\}$ पर निर्भर करता है, अथवा (*ii*) बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है, जब पिंड के लिए जो स्वेच्छा से किसी ऐसे बंद पथ में स्वतः अपनी प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाता है।

3. एकविमीय संरक्षी बल के लिए हम *स्थितिज ऊर्जा फलन* $V(x)$ को इस प्रकार परिभाषित सकते हैं

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

अथवा, $$V_i - V_s = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x$$

4. यांत्रिक ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार, यदि किसी पिंड पर कार्यरत बल संरक्षी हैं तो पिंड की कुल यांत्रिक ऊर्जा अचर रहती हैं।

5. m द्रव्यमान के किसी कण की पृथ्वी की सतह से x ऊँचाई पर *गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा* $V(x) = m\,g\,x$ होती है, जहाँ ऊँचाई के साथ g के मान में परिवर्तन उपेक्षणीय है।

6. k बल-नियतांक वाले स्प्रिंग, जिसमें खिंचाव x है, की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा होती है :

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

7. दो सदिशों के अदिश अथवा बिंदु गुणनफल को हम **A·B** लिखते हैं (इसे **A** डॉट **B** के रूप में पढ़ते हैं)**A·B** एक अदिश राशि है जिसका मान $AB\cos\theta$ होता है। θ सदिशों **A** व **B** के बीच का कोण है। **A·B** का मान चूंकि θ पर निर्भर करता है इसलिए यह धनात्मक, त्रृणात्मक अथवा शुन्य हो सकता है। दो सदिशों के अदिश गुणनफल की व्याख्या एक सदिश के परिमाण तथा दूसरे सदिश के पहले घटक के अनुदिश घटक के गुणनफल के रूप में भी कर सकते हैं। एकांक सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ व $\hat{\mathbf{k}}$ के लिए हमें निम्नलिखित तथ्य याद रखने चाहिए :

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$

तथा $$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = 0$$

अदिश गुणनफल क्रम-विनिमेय तथा वितरण नियमों का पालन करते हैं।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमा	मात्रक	टिप्पणी
कार्य	W	$[\mathrm{M\,L^2T^{-2}}]$	J	W = **F.d**
गतिज ऊर्जा	K	$[\mathrm{M\,L^2T^{-2}}]$	J	$K = \frac{1}{2}mv^2$
स्थितिज ऊर्जा	$V(x)$	$[\mathrm{M\,L^2T^{-2}}]$	J	$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$
यांत्रिक ऊर्जा	E	$[\mathrm{M\,L^2T^{-2}}]$	J	$E = K + V$
स्प्रिंग नियतांक	k	$[\mathrm{M\,T^{-2}}]$	N $\mathrm{m^{-1}}$	$F = -k\,x$ $V(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$
शक्ति	P	$[\mathrm{M\,L^2T^{-3}}]$	W	$P = \mathbf{F.v}$ $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

विचारणीय विषय

1. वाक्यांश "किए गए कार्य का परिकलन कीजिए" अधूरा है। हमें विशेष बल या बलों के समूह द्वारा किसी पिंड का निश्चित विस्थापन करने में किए गए कार्य का स्पष्ट उल्लेख करना चाहिए (अथवा संदर्भ देते हुए स्पष्टतया इंगित करना चाहिए)।
2. किया गया कार्य एक अदिश राशि है। यह भौतिक राशि धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है, जबकि द्रव्यमान और गतिज ऊर्जा धनात्मक अदिश राशियाँ हैं। किसी पिंड पर घर्षण या श्यान बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।
3. न्यूटन के तृतीय नियमानुसार, किन्हीं दो पिंडों के मध्य परस्पर एक-दूसरे पर आरोपित बलों का योग शून्य होता है।
$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0$$
परंतु दो बलों द्वारा किए गए कार्य का योग सदैव शून्य नहीं होता है, अर्थात्
$$W_{12} + W_{21} \neq 0$$
तथापि, *कभी-कभी यह सत्य भी हो सकता है।*
4. कभी-कभी किसी बल द्वारा किए गए कार्य की गणना तब भी की जा सकती है जबकि बल की ठीक-ठीक प्रकृति का ज्ञान न भी हो। उदाहरण 5.2 से यह स्पष्ट है, जहाँ कार्य-ऊर्जा प्रमेय का ऐसी स्थिति में प्रयोग किया गया है।
5. कार्य-ऊर्जा प्रमेय न्यूटन के द्वितीय नियम से स्वतन्त्र नहीं है। कार्य-ऊर्जा प्रमेय को न्यूटन के द्वितीय नियम के अदिश रूप में देखा जा सकता है। यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के सिद्धांत को, संरक्षी बलों के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय के एक महत्त्वपूर्ण परिणाम के रूप में समझा जा सकता है।
6. कार्य-ऊर्जा प्रमेय सभी जड़त्वीय फ्रेमों में लागू होती है। इसे अजड़त्वीय फ्रेमों में भी लागू किया जा सकता है यदि विचारणीय पिंड पर आरोपित कुल बलों के परिकलन में छद्म बल के प्रभाव को भी सम्मिलित कर लिया जाए।
7. संरक्षी बलों के अधीन किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा हमेशा किसी नियतांक तक अनिश्चित रहती है। उदाहरणार्थ, किसी पिंड की स्थितिज ऊर्जा किस बिंदु पर शून्य लेनी है, यह केवल स्वेच्छा से चयन किए गए बिंदु पर निर्भर करता है। जैसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा mgh की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा के लिए शून्य बिंदु पृथ्वी के पृष्ठ पर लिया गया है। स्प्रिंग के लिए जिसकी ऊर्जा $\frac{1}{2}kx^2$ है, स्थितिज ऊर्जा के लिए शून्य बिंदु, दोलायमान द्रव्यमान की माध्य स्थिति पर लिया गया है।
8. यांत्रिकी में प्रत्येक बल स्थितिज ऊर्जा से संबद्ध नहीं होता है। उदाहरणार्थ, घर्षण बल द्वारा किसी बंद पथ में किया गया कार्य शून्य नहीं है और न ही घर्षण से स्थितिज ऊर्जा को संबद्ध किया जा सकता है।
9. किसी संघट्ट के दौरान (a) संघट्ट के प्रत्येक क्षण में पिंड का कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है, (b) गतिज ऊर्जा संरक्षण (चाहे संघट्ट प्रत्यास्थ ही हो) संघट्ट की समाप्ति के पश्चात् ही लागू होता है और संघट्ट के प्रत्येक क्षण के लिए लागू नहीं होता है। वास्तव में, संघट्ट करने वाले दोनों पिंड विकृत हो जाते हैं और क्षण भर के लिए एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में आ जाते हैं।

अभ्यास

5.1 किसी वस्तु पर किसी बल द्वारा किए गए कार्य का चिह्न समझना महत्त्वपूर्ण है। सावधानीपूर्वक बताइए कि निम्नलिखित राशियाँ धनात्मक हैं या ऋणात्मक :

(a) किसी व्यक्ति द्वारा किसी कुएँ में से रस्सी से बँधी बाल्टी को रस्सी द्वारा बाहर निकालने में किया गया कार्य।

(b) उपर्युक्त स्थिति में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य।

(c) किसी आनत तल पर फिसलती हुई किसी वस्तु पर घर्षण द्वारा किया गया कार्य।

(d) किसी खुरदरे क्षैतिज तल पर एकसमान वेग से गतिमान किसी वस्तु पर लगाए गए बल द्वारा किया गया कार्य।

(e) किसी दोलायमान लोलक को विरामावस्था में लाने के लिए वायु के प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य।

5.2 2 kg द्रव्यमान की कोई वस्तु जो आरंभ में विरामावस्था में है, 7 N के किसी क्षैतिज बल के प्रभाव से एक मेज पर गति करती है। मेज का गतिज-घर्षण गुणांक 0.1 है। निम्नलिखित का परिकलन कीजिए और अपने परिणामों की व्याख्या कीजिए।

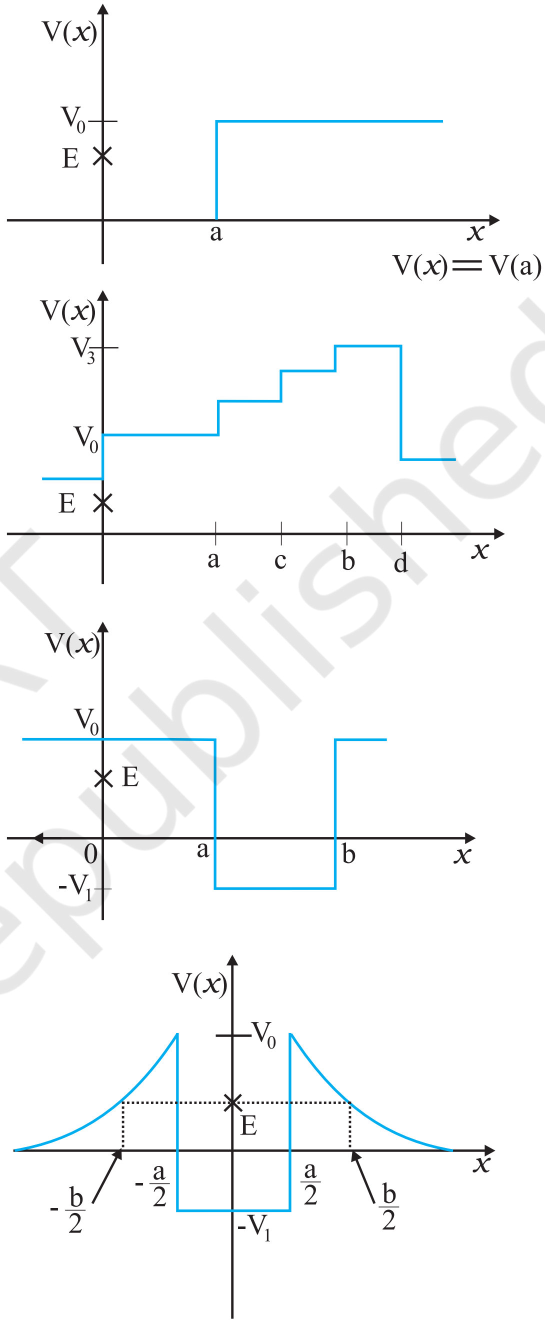
(a) लगाए गए बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य।

(b) घर्षण द्वारा 10 s में किया गया कार्य।

(c) वस्तु पर कुल बल द्वारा 10 s में किया गया कार्य।

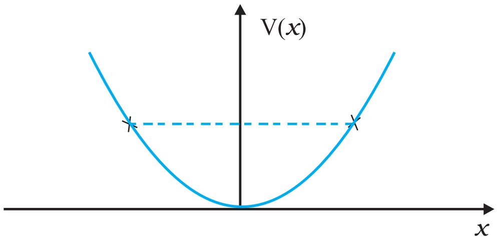
(d) वस्तु की गतिज ऊर्जा में 10 s में परिवर्तन।

5.3 चित्र 5.11 में कुछ एकविमीय स्थितिज ऊर्जा-फलनों के उदाहरण दिए गए हैं। कण की कुल ऊर्जा कोटि-अक्ष पर क्रॉस द्वारा निर्देशित की गई है। प्रत्येक स्थिति में, कोई ऐसे क्षेत्र बताइए, यदि कोई हैं तो, जिनमें दी गई ऊर्जा के लिए, कण को नहीं पाया जा सकता। इसके अतिरिक्त, कण की कुल न्यूनतम ऊर्जा भी निर्देशित कीजिए। कुछ ऐसे भौतिक संदर्भों के विषय में सोचिए जिनके लिए ये स्थितिज ऊर्जा आकृतियाँ प्रासंगिक हों।



चित्र 5.11

5.4 रेखीय सरल आवर्त गति कर रहे किसी कण का स्थितिज ऊर्जा फलन $V(x) = kx^2/2$ है, जहां k दोलक का बल नियतांक है। $k = 0.5$ $N\,m^{-1}$ के लिए $V(x)$ व x के मध्य ग्राफ चित्र 5.12 में दिखाया गया है। यह दिखाइए कि इस विभव के अंतर्गत गतिमान कुल 1J ऊर्जा वाले कण को अवश्य ही 'वापिस आना' चाहिए जब यह $x = \pm 2$ m पर पहुंचता है।



चित्र 5.12

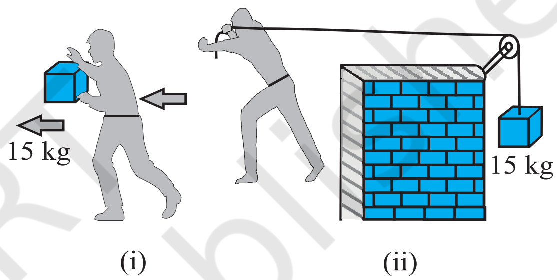
5.5 निम्नलिखित का उत्तर दीजिए:

(a) किसी राकेट का बाह्य आवरण उड़ान के दौरान घर्षण के कारण जल जाता है। जलने के लिए आवश्यक ऊष्मीय ऊर्जा किसके व्यय पर प्राप्त की गई–राकेट या वातावरण ?

(b) धूमकेतु सूर्य के चारों ओर बहुत ही दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में घूमते हैं। साधारणतया धूमकेतु पर सूर्य का गुरुत्वीय बल धूमकेतु के लंबवत् नहीं होता है। फिर भी धूमकेतु की संपूर्ण कक्षा में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है। क्यों ?

(c) पृथ्वी के चारों ओर बहुत ही क्षीण वायुमण्डल में घूमते हुए किसी कृत्रिम उपग्रह की ऊर्जा धीरे-धीरे वायुमण्डलीय प्रतिरोध (चाहे यह कितना ही कम क्यों न हो) के विरुद्ध क्षय के कारण कम होती जाती है फिर भी जैसे-जैसे कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के समीप आता है तो उसकी चाल में लगातार वृद्धि क्यों होती है ?

(d) चित्र 5.13(i) में एक व्यक्ति अपने हाथों में 15kg का कोई द्रव्यमान लेकर 2 m चलता है। चित्र 5.13(ii) में वह उतनी ही दूरी अपने पीछे रस्सी को खींचते हुए चलता है। रस्सी घिरनी पर चढ़ी हुई है और उसके दूसरे सिरे पर 15 kg का द्रव्यमान लटका हुआ है। परिकलन कीजिए कि किस स्थिति में किया गया कार्य अधिक है ?



चित्र 5.13

5.6 सही विकल्प को रेखांकित कीजिए :

(a) जब कोई संरक्षी बल किसी वस्तु पर धनात्मक कार्य करता है तो वस्तु की स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है/घटती है/अपरिवर्ती रहती है।

(b) किसी वस्तु द्वारा घर्षण के विरुद्ध किए गए कार्य का परिणाम हमेशा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा में क्षय होता है।

(c) किसी बहुकण निकाय के कुल संवेग-परिवर्तन की दर निकाय के बाह्य बल/आंतरिक बलों के जोड़ के अनुक्रमानुपाती होती है।

(d) किन्हीं दो पिंडों के अप्रत्यास्थ संघट्ट में वे राशियाँ, जो संघट्ट के बाद नहीं बदलती हैं; निकाय की कुल गतिज ऊर्जा/कुल रेखीय संवेग/कुल ऊर्जा हैं।

5.7 बतलाइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए।

(a) किन्हीं दो पिंडों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, प्रत्येक पिंड का संवेग व ऊर्जा संरक्षित रहती है।

(b) किसी पिंड पर चाहे कोई भी आंतरिक व बाह्य बल क्यों न लग रहा हो, निकाय की कुल ऊर्जा सर्वदा संरक्षित रहती है।

(c) प्रकृति में प्रत्येक बल के लिए किसी बंद लूप में, किसी पिंड की गति में किया गया कार्य शून्य होता है।

(d) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट में, किसी निकाय की अंतिम गतिज ऊर्जा, आरंभिक गतिज ऊर्जा से हमेशा कम होती है।

5.8 निम्नलिखित का उत्तर ध्यानपूर्वक, कारण सहित दीजिए :

(a) किन्हीं दो बिलियर्ड-गेंदों के प्रत्यास्थ संघट्ट में, क्या गेंदों के संघट्ट की अल्पावधि में (जब वे संपर्क में होती हैं) कुल गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है?

(b) दो गेंदों के किसी प्रत्यास्थ संघट्ट की लघु अवधि में क्या कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है?

(c) किसी अप्रत्यास्थ संघट्ट के लिए प्रश्न (a) व (b) के लिए आपके उत्तर क्या हैं?

(d) यदि दो बिलियर्ड-गेंदों की स्थितिज ऊर्जा केवल उनके केंद्रों के मध्य, पृथक्करण-दूरी पर निर्भर करती है तो संघट्ट प्रत्यास्थ होगा या अप्रत्यास्थ ? (ध्यान दीजिए कि यहाँ हम संघट्ट के दौरान बल के संगत स्थितिज ऊर्जा की बात कर रहे हैं, ना कि गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा की)

5.9 कोई पिंड जो विरामावस्था में है, अचर त्वरण से एकविमीय गति करता है। इसको किसी t समय पर दी गई शक्ति अनुक्रमानुपाती है

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

5.10 एक पिंड अचर शक्ति के स्रोत के प्रभाव में एक ही दिशा में गतिमान है। इसका t समय में विस्थापन, अनुक्रमानुपाती है

(i) $t^{1/2}$ (ii) t (iii) $t^{3/2}$ (iv) t^2

5.11 किसी पिंड पर नियत बल लगाकर उसे किसी निर्देशांक प्रणाली के अनुसार z - अक्ष के अनुदिश गति करने के लिए बाध्य किया गया है जो इस प्रकार है

$$\mathbf{F} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})\ \mathrm{N}$$

जहां $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ क्रमशः x-, y- एवं z- अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश हैं। इस वस्तु को z-अक्ष के अनुदिश 4 m की दूरी तक गति कराने के लिए आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

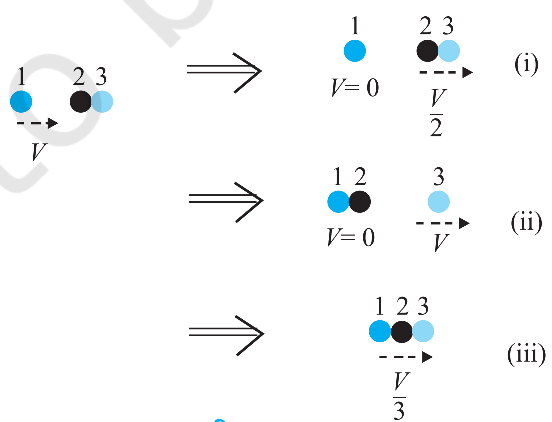
5.12 किसी अंतरिक्ष किरण प्रयोग में एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन का संसूचन होता है जिसमें पहले कण की गतिज ऊर्जा 10 keV है और दूसरे कण की गतिज ऊर्जा 100 keV है। इनमें कौन-सा तीव्रगामी है, इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन ? इनकी चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए। (इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान = 9.11×10^{-31} kg, प्रोटॉन का द्रव्यमान = 1.67×10^{-27} kg, 1 eV = 1.60×10^{-19} J)

5.13 2 mm त्रिज्या की वर्षा की कोई बूंद 500 m की ऊंचाई से पृथ्वी पर गिरती है। यह अपनी आरंभिक ऊंचाई के आधे हिस्से तक (वायु के श्यान प्रतिरोध के कारण) घटते त्वरण के साथ गिरती है और अपनी अधिकतम (सीमान्त) चाल प्राप्त कर लेती है, और उसके बाद एकसमान चाल से गति करती है। वर्षा की बूंद पर उसकी यात्रा के पहले व दूसरे अर्ध भागों में गुरुत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ? यदि बूंद की चाल पृथ्वी तक पहुंचने पर 10 m s^{-1} हो तो संपूर्ण यात्रा में प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

5.14 किसी गैस-पात्र में कोई अणु 200 m s^{-1} की चाल से अभिलंब के साथ 30° का कोण बनाता हुआ क्षैतिज दीवार से टकराकर पुनः उसी चाल से वापस लौट जाता है। क्या इस संघट्ट में संवेग संरक्षित है? यह संघट्ट प्रत्यास्थ है या अप्रत्यास्थ ?

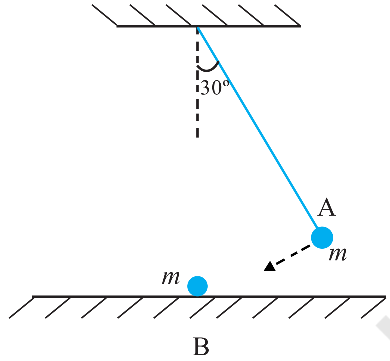
5.15 किसी भवन के भूतल पर लगा कोई पंप 30 m^3 आयतन की पानी की टंकी को 15 मिनट में भर देता है। यदि टंकी पृथ्वी तल से 40 m ऊपर हो और पंप की दक्षता 30% हो तो पंप द्वारा कितनी विद्युत शक्ति का उपयोग किया गया ?

5.16 दो समरूपी बॉल-बियरिंग एक-दूसरे के संपर्क में हैं और किसी घर्षणरहित मेज पर विरामावस्था में हैं। इनके साथ समान द्रव्यमान का कोई दूसरा बॉल-बियरिंग, जो आरंभ में V चाल से गतिमान है, सम्मुख संघट्ट करता है। यदि संघट्ट प्रत्यास्थ है तो संघट्ट के पश्चात् निम्नलिखित (चित्र 5.14) में से कौन-सा परिणाम संभव है?



चित्र 5.14

5.17 किसी लोलक के गोलक A को, जो ऊर्ध्वाधर से 30 का कोण बनाता है, छोड़े जाने पर मेज पर, विरामावस्था में रखे दूसरे गोलक B से टकराता है जैसा कि चित्र 5.15 में प्रदर्शित है। ज्ञात कीजिए कि संघट्ट के पश्चात् गोलक A कितना ऊंचा उठता है? गोलकों के आकारों की उपेक्षा कीजिए और मान लीजिए कि संघट्ट प्रत्यास्थ है।



चित्र 5.15

5.18 किसी लोलक के गोलक को क्षैतिज अवस्था से छोड़ा गया है। यदि लोलक की लंबाई 1.5 m है तो निम्नतम बिंदु पर आने पर गोलक की चाल क्या होगी? यह दिया गया है कि इसकी आरंभिक ऊर्जा का 5% अंश वायु प्रतिरोध के विरुद्ध क्षय हो जाता है।

5.19 300 kg द्रव्यमान की कोई ट्रॉली, 25 kg रेत का बोरा लिए हुए किसी घर्षणरहित पथ पर 27 km h^{-1} की एकसमान चाल से गतिमान है। कुछ समय पश्चात् बोरे में किसी छिद्र से रेत 0.05 kg s^{-1} की दर से निकलकर ट्राली के फर्श पर रिसने लगती है। रेत का बोरा खाली होने के पश्चात ट्रॉली की चाल क्या होगी ?

5.20 0.5 kg द्रव्यमान का एक कण $v = a\,x^{3/2}$ वेग से सरल रेखीय गति करता है जहां $a = 5\ m^{-1/2}s^{-1}$ है। $x = 0$ से $x = 2$ m तक इसके विस्थापन में कुल बल द्वारा किया गया कार्य कितना होगा ?

5.21 किसी पवनचक्की के ब्लेड, क्षेत्रफल A के वृत्त जितना क्षेत्रफल प्रसर्प करते हैं। (a) यदि हवा v वेग से वृत्त के लंबवत् दिशा में बहती है तो t समय में इससे गुजरने वाली वायु का द्रव्यमान क्या होगा ? (b) वायु की गतिज ऊर्जा क्या होगी ? (c) मान लीजिए कि पवनचक्की हवा की 25% ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित कर देती है। यदि $A = 30\ m^2$, और $v = 36$ km h^{-1} और वायु का घनत्व 1.2 kg m^{-3} है तो उत्पन्न विद्युत शक्ति का परिकलन कीजिए।

5.22 कोई व्यक्ति वजन कम करने के लिए 10 kg द्रव्यमान को 0.5 m की ऊंचाई तक 1000 बार उठाता है। मान लीजिए कि प्रत्येक बार द्रव्यमान को नीचे लाने में खोई हुई ऊर्जा क्षयित हो जाती है। (a) वह गुरुत्वाकर्षण बल के विरुद्ध कितना कार्य करता है ? (b) यदि वसा 3.8 10^7 J ऊर्जा प्रति किलोग्राम आपूर्ति करता हो जो कि 20% दक्षता की दर से यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है तो वह कितनी वसा खर्च कर डालेगा?

5.23 कोई परिवार 8 kW विद्युत-शक्ति का उपभोग करता है। (a) किसी क्षैतिज सतह पर सीधे आपतित होने वाली सौर ऊर्जा की औसत दर 200 W m^{-2} है। यदि इस ऊर्जा का 20% भाग लाभदायक विद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित किया जा सकता है तो 8 kW की विद्युत आपूर्ति के लिए कितने क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी ? (b) इस क्षेत्रफल की तुलना किसी विशिष्ट भवन की छत के क्षेत्रफल से कीजिए।

11088CH07

अध्याय 6

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

6.1 भूमिका

पिछले अध्यायों में हमने मुख्य रूप से आदर्श बिन्दु कण (एक कण जिसे द्रव्यमान युक्त बिन्दु के रूप में व्यक्त किया जाए तथा इसका कोई आकार नहीं हो) की गति का अध्ययन किया था। फिर, यह मानते हुए कि परिमित आकार के पिण्डों की गति को बिन्दु कण की गति के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, हमने उस अध्ययन के परिणामों को परिमित आकार के पिण्डों पर भी लागू कर दिया था।

दैनिक जीवन में जितने पिण्ड हमारे संपर्क में आते हैं वे सभी परिमित आकार के होते हैं। एक विस्तृत पिण्ड (परिमित आकार के पिण्ड) की गति को पूरे तौर पर समझने के लिए आमतौर पर उसका बिन्दुवत् आदर्श अपर्याप्त रहता है। इस अध्याय में हम इस प्रतिबंध के परे जाने की चेष्टा करेंगे और विस्तृत, पर परिमित पिण्डों की गति को समझने का प्रयास करेंगे। एक विस्तृत पिण्ड प्रथमतया कणों का एक निकाय है। अत: हम अपना विवेचन एक निकाय की गति से ही शुरू करना चाहेंगे। यहाँ कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एक मुख्य अवधारणा होगी। हम कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति का वर्णन करेंगे और फिर, परिमित आकार के पिण्डों की गति को समझने में इस अवधारणा की उपयोगिता बतायेंगे।

बड़े पिण्डों से जुड़ी बहुत सी समस्याएं उनको दृढ़ पिण्ड मानकर हल की जा सकती हैं। *आदर्श दृढ़ पिण्ड एक ऐसा पिण्ड है जिसकी एक सुनिश्चित और अपरिवर्तनीय आकृति होती है। इस प्रकार के ठोस के सभी कण युग्मों के बीच की दूरियाँ परिवर्तित नहीं होती।* दृढ़ पिण्ड की इस परिभाषा से यह स्पष्ट है कि कोई भी वास्तविक पिण्ड पूरी तरह दृढ़ नहीं होता, क्योंकि सभी व्यावहारिक पिण्ड बलों के प्रभाव से विकृत हो जाते हैं। परन्तु ऐसी बहुत सी स्थितियाँ होती हैं जिनमें विकृतियाँ नगण्य होती हैं। अत: कई प्रकार की स्थितियों में यथा पहिये, लट्टू, स्टील के शहतीर और यहाँ तक कि अणु, ग्रह जैसे पिण्डों की गति का अध्ययन करते समय, हम ध्यान न देंगे कि उनमें विकृति आती है, वे मुड़ते हैं या कम्पन करते हैं। हम उन्हें दृढ़ पिण्ड मान कर उनकी गति का अध्ययन करेंगे।

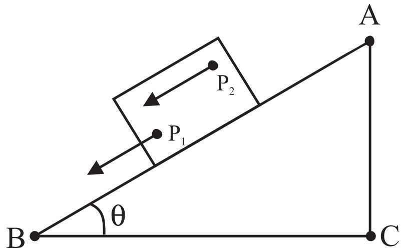
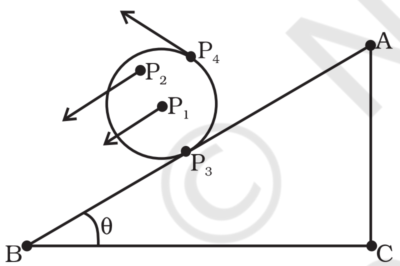


Fig 6.1 *नत-तल पर एक ब्लॉक की अधोमुखी स्थानांतरण (फिसलन) गति (ब्लॉक का प्रत्येक बिंदु यथा P_1, P_2.... किसी भी क्षण समान गति में हैं)*

6.1.1 एक दृढ़ पिण्ड में किस प्रकार की गतियाँ हो सकती हैं?

आइये, दृढ़ पिण्डों की गति के कुछ उदाहरणों से इस प्रश्न का उत्तर ढूंढ़ने की कोशिश करें। प्रथम एक आयताकार ब्लॉक पर विचार करें जो एक नत तल पर सीधा (बिना इधर-उधर हटे) नीचे की ओर फिसल रहा है। ब्लॉक एक दृढ़ पिण्ड लिया है। नत तल पर नीचे की ओर इसकी गति ऐसी है कि इसके सभी कण साथ-साथ चल रहे हैं, अर्थात् किसी क्षण सभी कण समान वेग से चलते हैं (चित्र 6.1)। यहाँ यह दृढ़ पिंड शुद्ध स्थानांतरण गति में है।

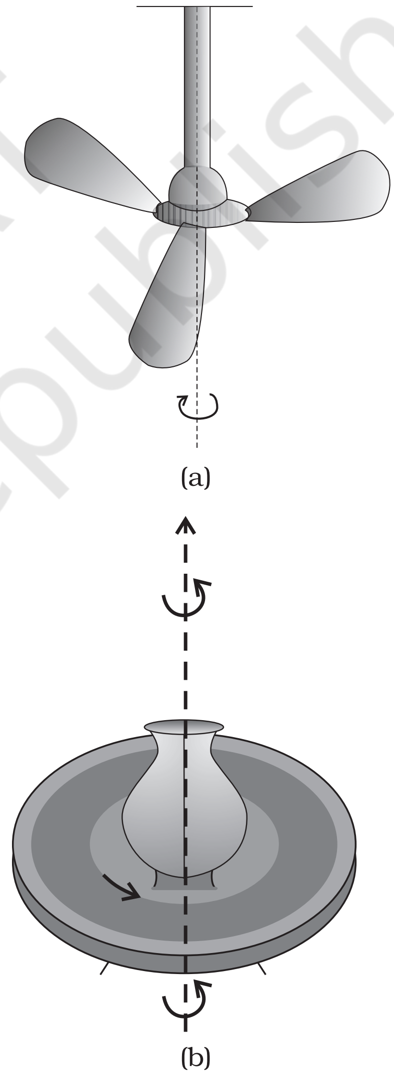
शुद्ध स्थानांतरण गति में किसी क्षण विशेष पर पिण्ड का प्रत्येक कण समान वेग से चलता है।



चित्र 6.2 *नत तल पर नीचे की ओर लुढ़कता सिलिंडर (बेलन)। यह शुद्ध स्थानांतरण गति नहीं है। किसी क्षण पर बिन्दु P_1, P_2, P_3 एवं P_4 के अलग-अलग वेग हैं (जैसा कि तीर दर्शाते हैं)। वास्तव में सम्पर्क बिन्दु P_3 का वेग किसी भी क्षण शून्य है यदि बेलन बिना फिसले हुए लुढ़कता है।*

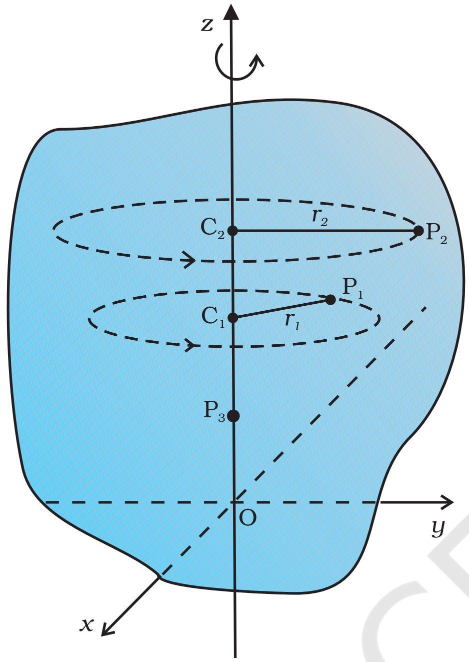
आइये, अब उसी नत तल पर नीचे की ओर लुढ़कते हुए एक धातु या लकड़ी के बेलन की गति पर विचार करते हैं (चित्र 6.2)। यह दृढ़ पिण्ड (बेलन) नत तल के शीर्ष से उसकी तली तक स्थानांतरित होता है, अत: इसमें स्थानांतरण गति प्रतीत होती है। लेकिन चित्र 6.2 यह भी दर्शाता है कि इसके सभी कण क्षण विशेष पर एक ही वेग से नहीं चल रहे हैं। अत: पिण्ड शुद्ध स्थानांतरण गति में नहीं है। अत: इसकी गति स्थानांतरीय होने के साथ-साथ 'कुछ और अलग' भी है।

यह 'कुछ और अलग' भी क्या है? यह समझने के लिए, आइये, हम एक ऐसा दृढ़ पिंड लें जिसको इस प्रकार व्यवरुद्ध कर दिया गया है कि यह स्थानांतरण गति न कर सके। किसी दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरण गति को निरुद्ध करने की सर्व सामान्य विधि यह है कि उसे एक सरल रेखा के अनुदिश स्थिर कर दिया जाए। तब इस दृढ़ पिण्ड की एकमात्र संभावित गति *घूर्णी गति* होगी। वह सरल रेखा जिसके अनुदिश इस दृढ़ पिण्ड को स्थिर बनाया गया है इसकी *घूर्णन-अक्ष* कहलाती है। यदि आप अपने चारों ओर देखें तो आपको छत का पंखा, कुम्हार का चाक (चित्र 6.3(a) एवं (b)), विशाल चक्री-झूला (जॉयन्ट व्हील), मेरी-गो-राउण्ड जैसे अनेक ऐसे उदाहरण मिल जायेंगे जहाँ किसी अक्ष के परित: घूर्णन हो रहा हो।



चित्र 6.3 *एक स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन*
(a) छत का पंखा
(b) कुम्हार का चाक

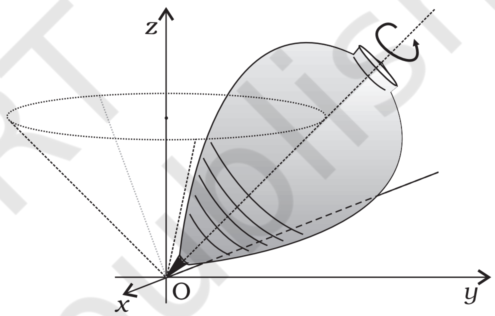
आइये, अब हम यह समझने की चेष्टा करें कि घूर्णन क्या है, और इसके क्या अभिलक्षण हैं? आप देख सकते हैं कि *एक दृढ़ पिण्ड के एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन में, पिण्ड का हर कण एक वृत्त में घूमता है। यह वृत्त अक्ष के लम्बवत् तल में है और इनका केन्द्र अक्ष पर अवस्थित है।* चित्र 6.4 में एक



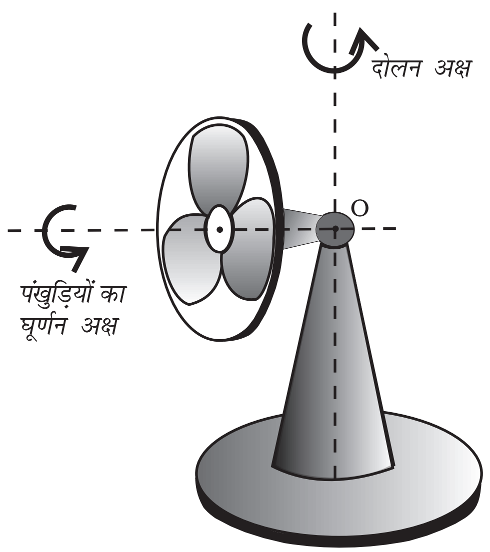
चित्र 6.4 *z-अक्ष के परितः एक दृढ़ पिण्ड का घूर्णन। पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु P_1 या P_2 एक वृत्त पर घूमता है जिसका केन्द्र (C_1 या C_2) अक्ष पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या (r_1 या r_2) अक्ष से बिन्दु (P_1 या P_2) की लम्बवत् दूरी है। अक्ष पर स्थित P_3 जैसा बिन्दु स्थिर रहता है।*

स्थिर अक्ष (निर्देश फ्रेम की z-अक्ष) के परितः किसी दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति दर्शायी है। हम अक्ष से r_1 दूरी पर स्थित दृढ़ पिण्ड का कोई स्वेच्छ कण P_1 लें। यह कण अक्ष के परितः r_1 त्रिज्या के वृत्त पर घूमता है जिसका केन्द्र C_1 अक्ष पर स्थित है। यह वृत्त अक्ष के लम्बवत् तल में अवस्थित है। चित्र में एक दूसरा कण P_2 भी दर्शाया गया है जो स्थिर अक्ष से r_2 दूरी पर है। कण P_2, r_2 त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर C_2 है। यह वृत्त भी अक्ष के लम्बवत् तल में है। ध्यान दें कि P_1 एवं P_2 द्वारा बनाये गए वृत्त अलग-अलग तलों में हैं पर ये दोनों तल स्थिर अक्ष के लम्बवत् हैं। अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु, जैसे P_3 के लिए, $r = 0$। ये कण, पिण्ड के घूमते समय भी स्थित रहते हैं। यह अपेक्षित भी है क्योंकि घूर्णन अक्ष स्थिर है।

तथापि, घूर्णन के कुछ उदाहरणों में, अक्ष स्थिर नहीं भी रहती। इस प्रकार के घूर्णन के मुख्य उदाहरणों में एक है, एक ही स्थान पर घूमता लट्टू (चित्र 6.5(a))। (लट्टू की गति के संबंध में हमने यह मान लिया है कि यह एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानांतरित नहीं होता और इसलिए इसमें स्थानांतरण गति नहीं है।) अपने अनुभव के आधार पर हम यह जानते हैं कि इस प्रकार घूमते लट्टू की अक्ष, भूमि पर इसके सम्पर्क-बिन्दु से गुजरते अभिलम्ब के परितः एक शंकु बनाती है जैसा कि चित्र 6.5(a) में दर्शाया गया है। (ऊर्ध्वाधर के परितः लट्टू की अक्ष का इस प्रकार घूमना पुरस्सरण कहलाता है)। *ध्यान दें कि लट्टू का वह बिन्दु जहाँ यह धरातल को छूता है, स्थिर है।* किसी भी क्षण, लट्टू की घूर्णन-अक्ष, इसके सम्पर्क बिन्दु से गुजरती है। इस प्रकार की घूर्णन गति का दूसरा सरल उदाहरण घूमने वाला मेज का पंखा या पीठिका-पंखा है। आपने देखा होगा कि इस प्रकार के पंखे की अक्ष, क्षैतिज तल में, दोलन गति (इधर से उधर घूमने की) करती है और यह गति ऊर्ध्वाधर रेखा के परितः होती है जो उस बिन्दु से गुजरती है जिस पर अक्ष की धुरी टिकी होती है (चित्र 6.5(b) में बिन्दु O)।

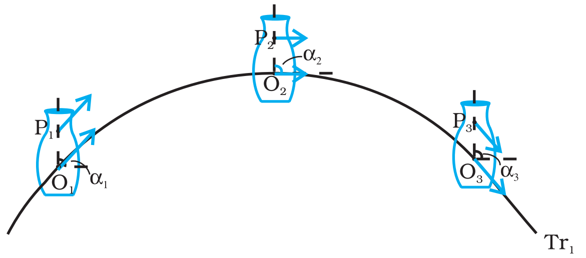


चित्र 6.5 *(a) घूमता हुआ लट्टू (इसकी टिप O का धरातल पर सम्पर्क बिन्दु स्थिर है)*

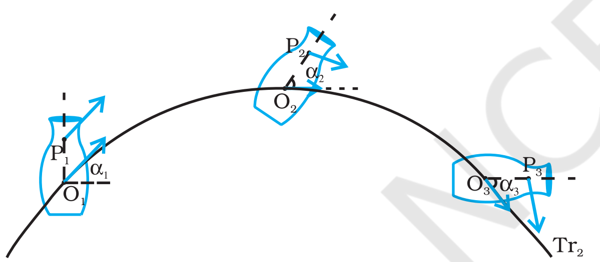


चित्र 6.5 *(b) दोलन करता हुआ मेज का पंखा जिसकी पंखुड़ियाँ घूर्णन गति में हैं। (पंखे की धुरी, बिन्दु O, स्थिर है)*

जब पंखा घूमता है और इसकी अक्ष इधर से उधर दोलन करती है तब भी यह बिन्दु स्थिर रहता है। घूर्णन गति के अधिक सार्विक मामलों में, जैसे कि लट्टू या पीठिका-पंखे के घूमने में, दृढ़ पिण्ड का एक बिन्दु स्थिर रहता है, न कि एक रेखा। इस मामले में अक्ष तो स्थिर नहीं है पर यह हमेशा एक स्थिर बिन्दु से गुजरती है। तथापि, अपने अध्ययन में, अधिकांशतः, हम ऐसी सरल एवं विशिष्ट घूर्णन गतियों तक सीमित रहेंगे जिनमें एक रेखा (यानि अक्ष) स्थिर रहती है। अतः जब तक अन्यथा न कहा जाय, हमारे लिए घूर्णी गति एक स्थिर अक्ष के परितः ही होगी।



चित्र 6.6(a) *एक दृढ़ पिण्ड की गति जो शुद्ध स्थानांतरीय है*



चित्र 6.6(b) *दृढ़ पिण्ड की ऐसी गति जो स्थानांतरीय और घूर्णी गतियों का संयोजन है*

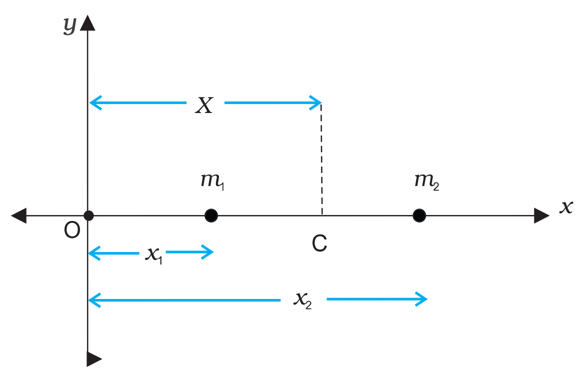
चित्र 6.6 (a) एवं 6.6 (b) एक ही पिण्ड की विभिन्न गतियाँ दर्शाते हैं। ध्यान दें, कि P पिण्ड का कोई स्वेच्छ बिन्दु है; O पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है, जिसके विषय में अगले खण्ड में बताया गया है। यहाँ यह कहना पर्याप्त होगा कि बिन्दु O के गमन पथ ही पिण्ड के स्थानांतरीय गमन पथ Tr_1 एवं Tr_2 हैं। तीन अलग-अलग क्षणों पर, बिन्दुओं O एवं P की स्थितियाँ चित्र 6.6(a) एवं 6.6 (b) दोनों ही क्रमशः O_1, O_2, O_3, एवं P_1, P_2, P_3 द्वारा प्रदर्शित की गई हैं। चित्र 6.6(a) से यह स्पष्ट है कि शुद्ध स्थानांतरण की स्थिति में, पिण्ड के किन्हीं भी दो बिन्दुओं O एवं P के वेग, बराबर होते हैं। यह भी ज्ञातव्य है, कि इस स्थिति में OP, का दिग्विन्यास, यानि कि वह कोण जो OP एक नियत दिशा (माना कि क्षैतिज) से बनाता है, समान रहता है अर्थात् $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ । चित्र 6.6 (b) स्थानांतरण एवं घूर्णन के संयोजन से निर्मित गति दर्शाता है। इस गति में बिन्दुओं O एवं P के क्षणिक वेगों के मान अलग-अलग हो सकते हैं और कोणों α_1, α_2, α_3 के मान भी भिन्न हो सकते हैं।

एक नत तल पर नीचे की ओर बेलन का लुढ़कना दो तरह की गतियों का संयोजन है– स्थानांतरण गति और एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णी गति। अतः, लुढ़कन गति के संदर्भ में जिस 'कुछ और अलग' का जिक्र पहले हमने किया था वह घूर्णी गति है। इस दृष्टिकोण से चित्र 6.6(a) एवं (b) को आप पर्याप्त शिक्षाप्रद पायेंगे। इन दोनों चित्रों में एक ही पिण्ड की गति, समान स्थानांतरीय गमन-पथ के अनुदिश दर्शाई गई है। चित्र 6.6(a) में दर्शाई गई गति शुद्ध स्थानांतरीय है, जबकि चित्र 6.6(b) में दर्शाई गई गति स्थानांतरण एवं घूर्णी दोनों प्रकार की गतियों का संयोजन है। (आप स्वयं भारी पुस्तक जैसा एक दृढ़ पिण्ड फेंक कर दर्शाई गई दोनों प्रकार की गतियाँ उत्पन्न करने की कोशिश कर सकते हैं।)

आइये अब हम प्रस्तुत खण्ड में वर्णित महत्वपूर्ण तथ्यों का सार फिर से आपको बतायें। **एक ऐसा दृढ़ पिण्ड जो न तो किसी चूल पर टिका हो और न ही किसी रूप में स्थिर हो, दो प्रकार की गति कर सकता है - या तो शुद्ध स्थानांतरण या स्थानांतरण एवं घूर्णन गति का संयोजन।** *एक ऐसे दृढ़ पिण्ड की गति जो या तो चूल पर टिका हो या किसी न किसी रूप में स्थिर हो, घूर्णी गति होती है।* घूर्णन किसी ऐसी अक्ष के परितः हो सकता है जो स्थिर हो (जैसे छत के पंखे में) या फिर एक ऐसी अक्ष के परितः जो स्वयं घूमती हो (जैसे इधर से उधर घूमते मेज के पंखे में)। इस अध्याय में हम एक स्थिर अक्ष के परितः होने वाली घूर्णी गति का ही अध्ययन करेंगे।

6.2 द्रव्यमान केन्द्र

पहले हम यह देखेंगे कि द्रव्यमान केन्द्र क्या है और फिर इसके महत्व पर प्रकाश डालेंगे। सरलता की दृष्टि से हम दो कणों के निकाय से शुरुआत करेंगे। दोनों कणों की स्थितियों को मिलाने वाली रेखा को हम x- अक्ष मानेंगे। (चित्र 6.7)



चित्र 6.7 *दो कणों और उनके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति*

माना कि दो कणों की, किसी मूल बिन्दु O से दूरियाँ क्रमशः x_1 एवं x_2 हैं। इन कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 एवं m_2 हैं। इन दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C एक ऐसा बिन्दु होगा जिसकी O से दूरी, X का मान हो

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.1)$$

समीकरण (6.1) में X को हम x_1 एवं x_2 का द्रव्यमान भारित माध्य मान सकते हैं। यदि दोनों कणों का द्रव्यमान बराबर हो तो $m_1 = m_2 = m$, तब

$$X = \frac{m x_1 + m x_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

इस प्रकार समान द्रव्यमान के दो कणों का द्रव्यमान केन्द्र ठीक उनके बीचोंबीच है।

अगर हमारे पास n कण हों, जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2, ...m_n हों और सबको x- अक्ष के अनुदिश रखा गया हो, तो परिभाषा के अनुसार इन सब कणों का द्रव्यमान केन्द्र होगा

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad (6.2)$$

जहाँ $x_1, x_2, \ldots x_n$ कणों की क्रमशः मूलबिन्दु से दूरियाँ हैं; X भी उसी मूलबिन्दु से मापा गया है। संकेत $\sum$ (यूनानी भाषा का अक्षर सिग्मा) संकलन को व्यक्त करता है जो इस मामले में n कणों के लिए किया गया है। संकलन फल

$$\sum m_i = M$$

निकाय का कुल द्रव्यमान है।

माना हमारे पास तीन कण हैं जो एक सरल रेखा में तो नहीं, पर एक समतल में रखे गए हैं। तब हम उस तल में जिसमें ये तीन कण रखे गए हैं x- एवं y-अक्ष निर्धारित कर सकते हैं, और इन तीन कणों की स्थितियों को क्रमशः निर्देशांकों (x_1,y_1), (x_2,y_2) एवं (x_3,y_3) द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। मान लीजिए कि इन तीन कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2 एवं m_3 हैं। इन तीन कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र C निर्देशांकों (X, Y) द्वारा व्यक्त किया जायेगा जिनके मान हैं-

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (6.3a)$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (6.3b)$$

समान द्रव्यमान वाले कणों के लिए $m = m_1 = m_2 = m_3$,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

अर्थात् समान द्रव्यमान वाले कणों के लिए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र उनकी स्थिति बिन्दुओं को मिलाने से बने त्रिभुज के केन्द्रक पर होगा।

समीकरण (6.3a,b) के परिणामों को, सरलतापूर्वक, ऐसे n कणों के एक निकाय के लिए सार्विक किया जा सकता है जो एक समतल में न होकर, अंतरिक्ष में फैले हों। इस तरह के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र (X, Y, Z) है, जहाँ

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad (6.4a)$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad (6.4b)$$

और $$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \qquad (6.4c)$$

यहाँ $M = \sum m_i$ निकाय का कुल द्रव्यमान है। सूचक i का मान 1 से n तक बदलता है, m_i i वें कण का द्रव्यमान है, और i वें कण की स्थिति (x_i, y_i, z_i) से व्यक्त की गई है। यदि हम स्थिति-सदिश की अवधारणा का उपयोग करें तो समीकरण (6.4a, b, c) को संयोजित करके एकल समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है। यदि $\mathbf{r}_i$, i वें कण का स्थिति–वेक्टर है और $\mathbf{R}$ द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति–सदिश है:

$$\mathbf{r}_i = x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

एवं $$\mathbf{R} = X \hat{\mathbf{i}} + Y \hat{\mathbf{j}} + Z \hat{\mathbf{k}}$$

तब $$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \qquad (6.4d)$$

समीकरण के दाहिनी ओर लिखा गया योग सदिश–योग है।

सदिशों के इस्तेमाल से समीकरणों की संक्षिप्तता पर ध्यान दीजिए। यदि संदर्भ–फ्रेम (निर्देशांक निकाय) के मूल बिन्दु को, दिए गए कण–निकाय के द्रव्यमान केन्द्र में लिया जाए तो $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$।

एक दृढ़ पिण्ड, जैसे कि मीटर–छड़ या फ्लाइ व्हील, बहुत पास-पास रखे गए कणों का निकाय है; अतः समीकरण (6.4a, b, c, d) दृढ़ पिण्ड के लिए भी लागू होते हैं। इस प्रकार के पिण्डों में कणों (परमाणुओं या अणुओं) की संख्या इतनी

अधिक होती है, कि इन समीकरणों में, सभी पृथक-पृथक कणों को लेकर संयुक्त प्रभाव ज्ञात करना असंभव कार्य है। पर, क्योंकि कणों के बीच की दूरी बहुत कम है, हम पिण्ड में द्रव्यमान का सतत वितरण मान सकते हैं। यदि पिण्ड को n छोटे द्रव्यमान खण्डों में विभाजित करें जिनके द्रव्यमान $\Delta m_1, \Delta m_2 ... \Delta m_n$ हैं तथा i-वाँ खण्ड Δm_i बिन्दु (x_i, y_i, z_i) पर अवस्थित है ऐसा सोचें तो द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांकों के लगभग मान इस प्रकार व्यक्त करेंगे –

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

यदि हम n को वृहत्तर करें अर्थात् Δm_i को और छोटा करें तो ये समीकरण काफी यथार्थ मान बताने लगेंगे। उस स्थिति में i-कणों के योग को हम समाकल से व्यक्त करेंगे।

$$\sum \Delta m_i \rightarrow \int dm = M,$$

$$\sum (\Delta m_i)x_i \rightarrow \int x\, dm,$$

$$\sum (\Delta m_i)y_i \rightarrow \int y\, dm,$$

और $$\sum (\Delta m_i)z_i \rightarrow \int z\, dm$$

यहाँ M पिण्ड का कुल द्रव्यमान है। द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांकों को अब हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$X = \frac{1}{M}\int x\, dm,\ Y = \frac{1}{M}\int y\, dm \text{ और } Z = \frac{1}{M}\int z\, dm \qquad (6.5a)$$

इन तीन अदिश व्यंजकों के तुल्य सदिश व्यंजक इस प्रकार लिख सकते हैं–

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm \qquad (6.5b)$$

यदि हम द्रव्यमान केन्द्र को अपने निर्देशांक निकाय का मूल-बिन्दु चुनें तो

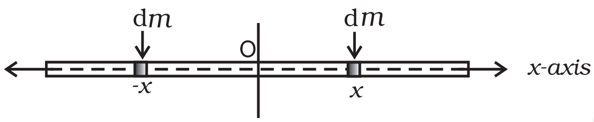
$$\mathbf{R}\ (x, y, z) = 0$$

अर्थात्, $$\int \mathbf{r}\, dm = 0$$

या $$\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0 \qquad (6.6)$$

प्रायः हमें नियमित आकार के समांग पिण्डों; जैसे – वलयों, गोल-चकतियों, गोलों, छड़ों इत्यादि के द्रव्यमान केन्द्रों की गणना करनी पड़ती है। (समांग पिण्ड से हमारा तात्पर्य एक ऐसी वस्तु से है जिसमें द्रव्यमान का समान रूप से वितरण हो)। सममिति का विचार करके हम सरलता से यह दर्शा सकते हैं कि इन पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र ही होते हैं।

आइये, एक पतली छड़ पर विचार करें, जिसकी चौड़ाई और मोटाई (यदि इसकी अनुप्रस्थ काट आयताकार है) अथवा त्रिज्या (यदि छड़ बेलनाकार है), इसकी लम्बाई की तुलना में बहुत छोटी है। छड़ की लम्बाई x-अक्ष के अनुदिश रखें और मूल बिन्दु इसके ज्यामितीय केन्द्र पर ले लें तो परावर्तन सममिति की दृष्टि से हम कह सकते हैं कि प्रत्येक x पर स्थित प्रत्येक dm घटक के समान dm का घटक $-x$ पर भी स्थित होगा (चित्र 6.8)।



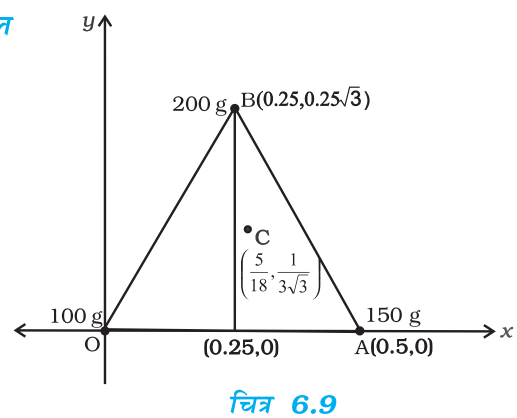
चित्र 6.8 एक पतली छड़ का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात करना

समाकल में हर जोड़े का योगदान शून्य है और इस कारण स्वयं $\int x\, dm$ का मान शून्य हो जाता है। समीकरण (6.6) बताती है कि जिस बिन्दु के लिए समाकल शून्य हो वह पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र है। अतः समांग छड़ का ज्यामितीय केन्द्र इसका द्रव्यमान केन्द्र है। इसे परावर्तन सममिति के प्रयोग से समझ सकते हैं।

सममिति का यही तर्क, समांग वलयों, चकतियों, गोलों और यहाँ तक कि वृत्ताकार या आयताकार अनुप्रस्थ काट वाली मोटी छड़ों के लिए भी लागू होगा। ऐसे सभी पिण्डों के लिए आप पायेंगे कि बिन्दु (x,y,z) पर स्थित हर द्रव्यमान घटक के लिए बिन्दु $(-x,-y,-z)$ पर भी उसी द्रव्यमान का घटक लिया जा सकता है। (दूसरे शब्दों में कहें तो इन सभी पिण्डों के लिए मूल बिन्दु परावर्तन-सममिति का बिन्दु है)। परिणामतः, समीकरण (6.5 a) में दिए गए सभी समाकल शून्य हो जाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि उपरोक्त सभी पिण्डों का द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र पर ही पड़ता है।

उदाहरण 6.1 एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए। कणों के द्रव्यमान क्रमशः 100g, 150g, एवं 200g हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 0.5 m है।

हल



चित्र 6.9

x एवं y- अक्ष चित्र 6.9 में दर्शाये अनुसार चुनें तो समबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिन्दुओं O, A एवं B के निर्देशांक क्रमशः (0,0), (0.5,0) एवं (0.25,0.25 $\sqrt{3}$) होंगे। माना कि 100g, 150g एवं 200g के द्रव्यमान क्रमशः O, A एवं B पर अवस्थित हैं। तब

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)] \text{ g m}}{(100 + 150 + 200) \text{ g}}$$

$$= \frac{75 + 50}{450} \text{m} = \frac{125}{450} \text{m} = \frac{5}{18} \text{m}$$

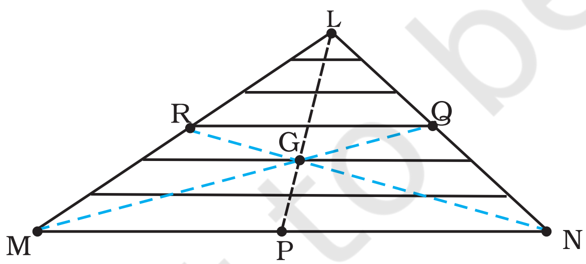
$$Y = \frac{[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})] \text{ g m}}{450 \text{ g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450} \text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{m}$$

द्रव्यमान केन्द्र C चित्र में दर्शाया गया है। ध्यान दें कि यह त्रिभुज OAB का ज्यामितीय केन्द्र नहीं है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों नही है?

उदाहरण 6.2: एक त्रिभुजाकार फलक का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए।

हल फलक (ΔLMN) को आधार (MN) के समान्तर पतली पट्टियों में बांटा जा सकता है जैसा चित्र 6.10 में दर्शाया गया है।

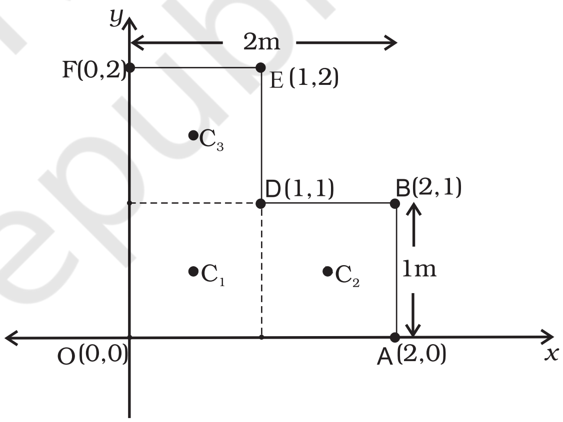


चित्र 6.10

समसिति के आधार पर हम कह सकते हैं कि हर पट्टी का द्रव्यमान केन्द्र उसका मध्य बिन्दु है। अगर हम सभी पट्टियों के मध्य बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें माध्यिका LP प्राप्त होती है। इसलिए, पूरे त्रिभुज का द्रव्यमान केन्द्र इस माध्यिका LP पर कहीं अवस्थित होगा। इसी प्रकार हम तर्क कर सकते हैं कि यह माध्यिका MQ और NR पर भी अवस्थित होगा। अतः यह द्रव्यमान केन्द्र तीनों माध्यिकाओं का संगामी बिन्दु गति त्रिभुज का केन्द्रक G है।

उदाहरण 6.3: एक दिए गए L-आकृति के फलक (एक पतली चपटी प्लेट) का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए, जिसका विभिन्न भुजाओं को चित्र 6.11 में दर्शाया है। फलक का द्रव्यमान 3 kg है।

हल चित्र 6.11 के अनुसार X एवं Y अक्षों को चुनें तो L-आकृति फलक के विभिन्न शीर्षों के निर्देशांक वही प्राप्त होते हैं जो चित्र में अंकित किए गए हैं। हम L-आकृति को तीन वर्गों से मिलकर बना हुआ मान सकते हैं जिनमें से प्रत्येक वर्ग की भुजा 1m है। प्रत्येक वर्ग का द्रव्यमान 1kg है, क्योंकि फलक समांग हैं। इन तीन वर्गों के द्रव्यमान केन्द्र C_1, C_2 और C_3 हैं, जो सममिति के विचार से उनके ज्यामितीय केन्द्र हैं और इनके निर्देशांक क्रमशः (1/2,1/2), (3/2,1/2), (1/2,3/2) हैं। हम कह सकते हैं कि L-आकृति का द्रव्यमान केन्द्र (X, Y) इन द्रव्यमान बिन्दुओं का द्रव्यमान केन्द्र हैं।



चित्र 6.11

अतः

$$X = \frac{[1(1/2) + 1(3/2) + 1(1/2)] \text{kg m}}{(1+1+1) \text{kg}} = \frac{5}{6} \text{m}$$

$$Y = \frac{[[1(1/2) + 1(1/2) + 1(3/2)]] \text{kg m}}{(1+1+1) \text{kg}} = \frac{5}{6} \text{m}$$

L-आकृति का द्रव्यमान केन्द्र रेखा OD पर पड़ता है। इस बात का अंदाजा हम बिना किसी गणना के लगा सकते थे। क्या आप बता सकते हैं, कैसे? यदि यह मानें कि चित्र 6.11 में

दर्शाये गए L आकृति फलक के तीन वर्गों के द्रव्यमान अलग–अलग होते तब आप इस फलक का द्रव्यमान केन्द्र कैसे ज्ञात करेंगे?

6.3 द्रव्यमान केन्द्र की गति

द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा जानने के बाद, अब हम इस स्थिति में हैं कि n कणों के एक निकाय के लिए इसके भौतिक महत्व की विवेचना कर सकें। समीकरण (6.4d) को हम फिर से इस प्रकार लिख सकते हैं–

$$M\mathbf{R} = \sum m_i \mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n \qquad (6.7)$$

समीकरण के दोनों पक्षों को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर–

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{\mathrm{d}t}$$

या

$$M\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \qquad (6.8)$$

जहाँ, $\mathbf{v}_1 (= \mathrm{d}\mathbf{r}_1/\mathrm{d}t)$ प्रथम कण का वेग है, $\mathbf{v}_2 (= \mathrm{d}\mathbf{r}_2/\mathrm{d}t)$ दूसरे कण का वेग है, इत्यादि और $\mathbf{V} = \mathrm{d}\mathbf{R}/\mathrm{d}t$ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग है। ध्यान दें, कि हमने यह मान लिया है कि m_1, m_2, ... आदि के मान समय के साथ बदलते नहीं हैं। इसलिए, समय के सापेक्ष समीकरणों को अवकलित करते समय हमने उनके साथ अचरांकों जैसा व्यवहार किया है।

समीकरण (6.8) को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर–

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_n}{\mathrm{d}t}$$

या

$$M\mathbf{A} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\mathbf{a}_n \qquad (6.9)$$

जहाँ $\mathbf{a}_1 (= \mathrm{d}\mathbf{v}_1/\mathrm{d}t)$ प्रथम कण का त्वरण है, $\mathbf{a}_2 (= \mathrm{d}\mathbf{v}_2/\mathrm{d}t)$ दूसरे कण का त्वरण है, इत्यादि और $\mathbf{A} (= \mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t)$ कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण है।

अब, न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार, पहले कण पर लगने वाला बल है $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$, दूसरे कण पर लगने वाला बल है $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$, आदि। तब समीकरण (6.9) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n \qquad (6.10)$$

अतः कणों के निकाय के कुल द्रव्यमान को द्रव्यमान केन्द्र के त्वरण से गुणा करने पर हमें उस कण–निकाय पर लगने वाले सभी बलों का सदिश योग प्राप्त होता है।

ध्यान दें कि जब हम पहले कण पर लगने वाले बल $\mathbf{F}_1$ की बात करते हैं, तो यह कोई एकल बल नहीं है, बल्कि, इस कण पर लगने वाले सभी बलों का सदिश योग है। यही बात हम अन्य कणों के विषय में भी कह सकते हैं। प्रत्येक कण पर लगने वाले उन बलों में कुछ *बाह्य बल* होंगे जो निकाय से बाहर के पिण्डों द्वारा आरोपित होंगे और कुछ *आंतरिक बल* होंगे जो निकाय के अंदर के कण एक दूसरे पर आरोपित करते हैं। न्यूटन के तृतीय नियम से हम जानते हैं कि ये आंतरिक बल सदैव बराबर परिमाण के और विपरीत दिशा में काम करने वाले जोड़ों के रूप में पाए जाते हैं और इसलिए समीकरण (6.10) में बलों को जोड़ने में इनका योग शून्य हो जाता है। समीकरण में केवल बाह्य बलों का योगदान रह जाता है। समीकरण (6.10) को फिर इस प्रकार लिख सकते हैं

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (6.11)$$

जहाँ $\mathbf{F}_{ext}$ निकाय के कणों पर प्रभावी सभी बाह्य बलों का सदिश योग है।

समीकरण (6.11) *बताती है कि कणों के किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र इस प्रकार गति करता है मानो निकाय का संपूर्ण द्रव्यमान उसमें संकेन्द्रित हो और सभी बाह्य बल उसी पर आरोपित हों।*

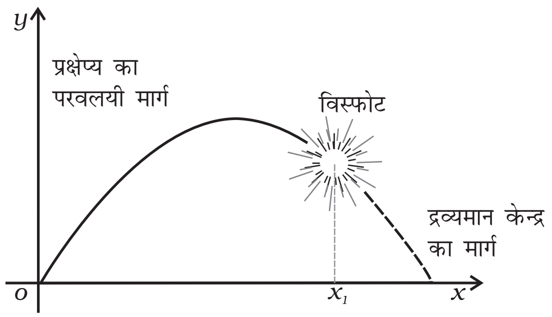
ध्यान दें कि द्रव्यमान केन्द्र की गति के विषय में जानने के लिए, कणों के निकाय के आंतरिक बलों के विषय में कोई जानकारी नहीं चाहिए, इस उद्देश्य के लिए हमें केवल बाह्य बलों को ही जानने की आवश्यकता है।

समीकरण (6.11) व्युत्पन्न करने के लिए हमें कणों के निकाय की प्रकृति सुनिश्चित नहीं करनी पड़ी। निकाय कणों का ऐसा संग्रह भी हो सकता है जिसमें तरह–तरह की आंतरिक गतियाँ हों, और शुद्ध स्थानांतरण गति करता हुआ, अथवा, स्थानांतरण एवं घूर्णी गति के संयोजन युक्त एक दृढ़ पिण्ड भी हो सकता है। निकाय कैसा भी हो और इसके अवयवी कणों में किसी भी प्रकार की गतियाँ हों, इसका द्रव्यमान केन्द्र समीकरण (6.11) के अनुसार ही गति करेगा।

परिमित आकार के पिण्डों को एकल कणों की तरह व्यवहार में लाने के बजाय अब हम उनको कणों के निकाय की तरह व्यवहार में ला सकते हैं। हम उनकी गति का शुद्ध स्थानांतरीय अवयव यानि निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए, बस, पूरे निकाय का कुल द्रव्यमान और निकाय पर लगे सभी बाह्य बलों को निकाय के द्रव्यमान केन्द्र पर प्रभावी मानना होगा।

यही कार्यविधि हमने पिण्डों पर लगे बलों के विश्लेषण और उनसे जुड़ी समस्या के हल के लिए अपनाई थी। हालांकि, इसके लिए कोई स्पष्ट कारण नहीं बताया गया था। अब हम यह समझ सकते हैं, कि पूर्व के अध्ययनों में, हमने बिन कहे ही यह मान लिया था कि निकाय में घूर्णी गति, एवं

कणों में आंतरिक गति या तो थी ही नहीं और यदि थी तो नगण्य थी। आगे से हमें यह मानने की आवश्यकता नहीं रहेगी। न केवल हमें अपनी पहले अपनाई गई पद्धति का औचित्य समझ में आ गया है, वरन्, हमने वह विधि भी ज्ञात कर ली है जिसके द्वारा (i) ऐसे दृढ़ पिण्ड की जिसमें घूर्णी गति भी हो, (ii) एक ऐसे निकाय की जिसके कणों में तरह-तरह की आंतरिक गतियाँ हों, स्थानांतरण गति को अलग करके समझा समझाया जा सकता है।



चित्र 6.12 *किसी प्रक्षेप्य के खण्डों का द्रव्यमान केन्द्र विस्फोट के बाद भी उसी परवलयाकार पथ पर चलता हुआ पाया जायेगा जिस पर यह विस्फोट न होने पर चलता।*

चित्र 6.12 समीकरण (6.11) को स्पष्ट करने वाला एक अच्छा उदाहरण है। अपने निर्धारित परवलयाकार पथ पर चलता हुआ एक प्रक्षेप्य हवा में फट कर टुकड़ों में बिखर जाता है। विस्फोट कारक बल आंतरिक बल है इसलिए उनका द्रव्यमान केन्द्र की गति पर कोई प्रभाव नहीं होता। प्रक्षेप्य और उसके खण्डों पर लगने वाला कुल बाह्य बल विस्फोट के बाद भी वही है जो विस्फोट से पहले था, यानि पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल। अतः, बाह्य बल के अंतर्गत प्रक्षेप्य के द्रव्यमान केन्द्र का परवलयाकार पथ विस्फोट के बाद भी वही बना रहता जो विस्फोट न होने की स्थिति में होता।

6.4 कणों के निकाय का रेखीय संवेग

आपको याद होगा कि रेखीय संवेग की परिभाषा करने वाला व्यंजक है

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{6.12}$$

और, एकल कण के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम को हम सांकेतिक भाषा में लिख सकते हैं

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{6.13}$$

जहाँ $\mathbf{F}$ कण पर आरोपित बल है। आइये, अब हम n कणों के एक निकाय पर विचार करें जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2,...m_n है और वेग क्रमशः $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n$ हैं। कण, परस्पर अन्योन्य क्रियारत हो सकते हैं और उन पर बाह्य बल भी लगे हो सकते हैं। पहले कण का रेखीय संवेग $m_1\mathbf{v}_1$, दूसरे कण का रेखीय संवेग $m_2\mathbf{v}_2$ और इसी प्रकार अन्य कणों के रेखीय संवेग भी हैं।

n कणों के इस निकाय का कुल रेखीय संवेग, एकल कणों के रेखीय संवेगों के सदिश योग के बराबर है।

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + ... + \mathbf{P}_n$$
$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + ... + m_n\mathbf{v}_n \tag{6.14}$$

इस समीकरण की समीकरण (6.8) से तुलना करने पर,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \tag{6.15}$$

अतः *कणों के एक निकाय का कुल रेखीय संवेग, निकाय के कुल द्रव्यमान तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र के वेग के गुणनफल के बराबर होता है।* समीकरण (6.15) का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \tag{6.16}$$

समीकरण (6.16) एवं समीकरण (6.11) की तुलना करने पर

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \tag{6.17}$$

यह गति के *न्यूटन के द्वितीय नियम का कथन है जो कणों के निकाय के लिए लागू किया गया है।*

यदि कणों के किसी निकाय पर लगे बाह्य बलों का योग शून्य हो, तो समीकरण (6.17) के आधार पर,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{या} \quad \mathbf{P} = \text{अचरांक} \tag{6.18a}$$

अतः जब कणों के किसी निकाय पर लगे बाह्य बलों का योग शून्य होता है तो उस निकाय का कुल रेखीय संवेग अचर रहता है। यह कणों के एक निकाय के लिए लागू होने वाला रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम है। समीकरण (6.15) के कारण, इसका अर्थ यह भी होता है कि जब निकाय पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य होता है तो इसके द्रव्यमान केन्द्र का वेग परिवर्तित नहीं होता। (इस अध्याय में कणों के निकाय का अध्ययन करते समय हम हमेशा यह मान कर चलेंगे कि निकाय का कुल द्रव्यमान अचर रहता है।)

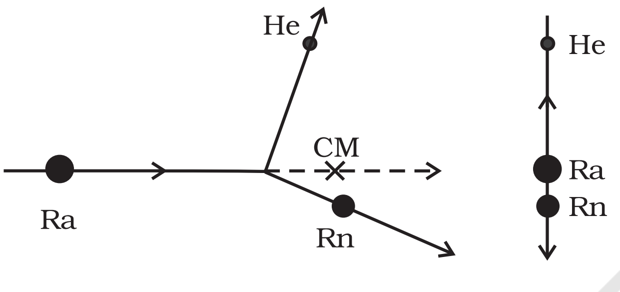
ध्यान दें, कि आंतरिक बलों के कारण, यानि उन बलों के कारण जो कण एक दूसरे पर आरोपित करते हैं, किसी विशिष्ट

कण का गमन-पथ काफी जटिल हो सकता है। फिर भी, यदि निकाय पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य हो तो द्रव्यमान केन्द्र अचर-वेग से ही चलता है, अर्थात्, मुक्त कण की तरह समगति से सरल रेखीय पथ पर चलता है।

सदिश समीकरण (6.18a) जिन अदिश समीकरणों के तुल्य है, वे हैं–

$$P_x = C_1,\ P_y = C_2 \text{ तथा } P_z = C_3 \qquad (6.18\text{ b})$$

यहाँ P_x, P_y, P_z कुल रेखीय संवेग सदिश **P** के, क्रमश: x, y एवं z दिशा में अवयव हैं और C_1, C_2, C_3 अचरांक हैं।

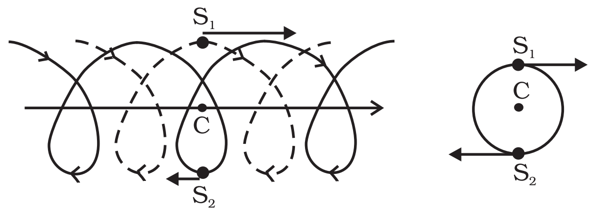


चित्र 6.13 (a) एक भारी नाभिक रेडियम (Ra) एक अपेक्षाकृत हलके नाभिक रेडॉन (Rn) एवं एक अल्फा-कण (हीलियम परमाणु का नाभिक, He) में विखंडित होता है। निकाय का द्रव्यमान केन्द्र समगति में है।

(b) द्रव्यमान केन्द्र की स्थिर अवस्था में उसी भारी कण रेडियम (Ra) का विखंडन। दोनों उत्पन्न हुए कण एक दूसरे की विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं।

एक उदाहरण के रूप में, आइये, रेडियम के नाभिक जैसे किसी गतिमान अस्थायी नाभिक के रेडियोएक्टिव क्षय पर विचार करें। रेडियम का नाभिक एक रेडन के नाभिक और एक अल्फा कण में विखंडित होता है। क्षय-कारक बल निकाय के आंतरिक बल हैं और उस पर प्रभावी बाह्य बल नगण्य हैं। अत: निकाय का कुल रेखीय संवेग, क्षय से पहले और क्षय के बाद समान रहता है। विखंडन में उत्पन्न हुए दोनों कण, रेडन का नाभिक एवं अल्फा-कण, विभिन्न दिशाओं में इस प्रकार चलते हैं कि उनके द्रव्यमान केन्द्र का गमन-पथ वही बना रहता है जिस पर क्षयित होने से पहले मूल रेडियम नाभिक गतिमान था (चित्र 6.13(a))।

यदि हम एक ऐसे संदर्भ फ्रेम से इस क्षय प्रक्रिया को देखें जिसमें द्रव्यमान केन्द्र स्थिर हो, तो इसमें शामिल कणों की गति विशेषकर सरल दिखाई पड़ती है; उत्पन्न हुए दोनों कण एक दूसरे की विपरीत दिशा में इस प्रकार गतिमान होते हैं कि उनका द्रव्यमान केन्द्र स्थिर रहे, जैसा चित्र 6.13 (b) में दर्शाया गया है।



चित्र 6.14 (a) बायनरी निकाय बनाते दो नक्षत्रों S_1 एवं S_2 के गमन पथ, जो क्रमश: बिन्दु रेखा एवं सतत रेखा द्वारा दर्शाये गए हैं। इनका द्रव्यमान केन्द्र C समगति में है।

(b) उसी बायनरी निकाय की गति जब द्रव्यमान केन्द्र C स्थिर है।

कणों की निकाय संबंधी बहुत सी समस्याओं में जैसा ऊपर बताई गई रेडियोएक्टिव क्षय संबंधी समस्या में दर्शाया है, प्रयोगशाला के संदर्भ-फ्रेम की अपेक्षा, द्रव्यमान-केन्द्र के फ्रेम में कार्य करना आसान होता है।

खगोलिकी में युग्मित (बायनरी) नक्षत्रों का पाया जाना एक आम बात है। यदि कोई बाह्य बल न लगा हो तो किसी युग्मित नक्षत्र का द्रव्यमान केन्द्र एक मुक्त-कण की तरह चलता है जैसा चित्र 6.14 (a) में दर्शाया गया है। चित्र में समान द्रव्यमान वाले दोनों नक्षत्रों के गमन पथ भी दर्शाये गए हैं; वे काफी जटिल दिखाई पड़ते हैं। यदि हम द्रव्यमान केन्द्र के फ्रेम से देखें तो हम पाते हैं कि ये दोनों नक्षत्र द्रव्यमान केन्द्र के परित: एक वृत्ताकार पथ पर गतिमान हैं जबकि द्रव्यमान केन्द्र स्थिर है। ध्यान दें, कि दोनों नक्षत्रों को वृत्ताकार पथ के व्यास के विपरीत सिरों पर बने रहना है (चित्र 6.14(b))। इस प्रकार इन नक्षत्रों का गमन पथ दो गतियों के संयोजन से निर्मित होता है (i) द्रव्यमान केन्द्र की सरल रेखा में समांग गति (ii) द्रव्यमान केन्द्र के परित: नक्षत्रों की वृत्ताकार कक्षाएँ।

उपरोक्त दो उदाहरणों से दृष्टव्य है, कि निकाय के एकल कणों की गति को द्रव्यमान केन्द्र की गति और द्रव्यमान केन्द्र के परित: गति में अलग करके देखना एक अत्यंत उपयोगी तकनीक है जिससे निकाय की गति को समझने में सहायता मिलती है।

6.5 दो सदिशों का सदिश गुणनफल

हम सदिशों एवं भौतिकी में उनके उपयोग के विषय में पहले से ही जानते हैं। अध्याय 5 (कार्य, ऊर्जा, शक्ति) में हमने दो

सदिशों के अदिश गुणन की परिभाषा की थी। एक महत्वपूर्ण भौतिक राशि, कार्य, दो सदिश राशियों, बल एवं विस्थापन के अदिश गुणनफल द्वारा परिभाषित की जाती है।

अब हम दो सदिशों का एक अन्य प्रकार का गुणन परिभाषित करेंगे। यह सदिश गुणन है। घूर्णी गति से संबंधित दो महत्वपूर्ण राशियाँ, बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग, सदिश गुणन के रूप में परिभाषित की जाती हैं।

सदिश गुणन की परिभाषा

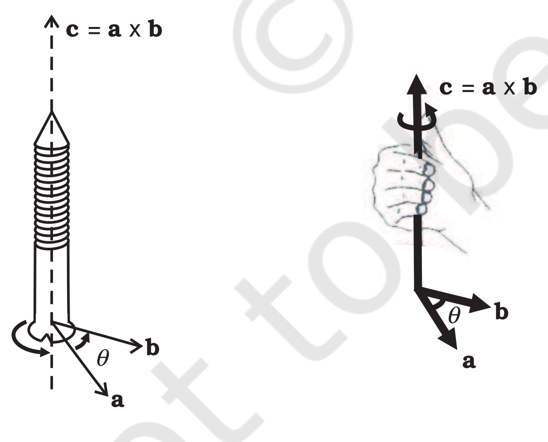
दो सदिशों **a** एवं **b** का सदिश गुणनफल एक ऐसा सदिश **c** है

(i) जिसका परिमाण $c = ab \sin\theta$ है, जहाँ a एवं b क्रमशः **a** एवं **b** के परिमाण हैं और θ दो सदिशों के बीच का कोण है।

(ii) **c** उस तल के अभिलम्बवत् है जिसमें **a** एवं **b** अवस्थित हैं।

(iii) यदि हम एक दक्षिणावर्त्त पेंच लें और इसको इस प्रकार रखें कि इसका शीर्ष **a** एवं **b** के तल में हो और लम्बाई इस तल के अभिलम्बवत् हो और फिर शीर्ष को **a** से **b** की ओर घुमायें, तो पेंच की नोंक **c** की दिशा में आगे बढ़ेगा। दक्षिणावर्त पेंच का नियम चित्र 6.15a में दर्शाया गया है।

यदि आप सदिशों **a** एवं **b** के तल के अभिलम्बवत् रेखा के परितः अपने दाहिने हाथ की उंगलियों को इस प्रकार मोड़ें कि उनके सिरे **a** से **b** की ओर इंगित करें, तब इस हाथ का फैला हुआ अंगूठा **c** की दिशा बतायेगा जैसा चित्र 6.15b में दर्शाया गया है।



(a) (b)

चित्र 6.15(a) दो सदिशों के सदिश गुणनफल की दिशा निर्धारित करने के लिए दक्षिणावर्त पेंच का नियम

(b) सदिश गुणनफल की दिशा बताने के लिए दाहिने हाथ का नियम

दाहिने हाथ के नियम को सरल रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं : अपने दाहिने हाथ की हथेली को **a** से **b** की ओर संकेत करते हुए खोलो। आपके फैले हुए अंगूठे का सिरा **c** की दिशा बतायेगा।

यह याद रखना चाहिए कि **a** और **b** के बीच दो कोण बनते हैं। चित्र 6.15 (a) एवं (b) में इनमें से कोण θ दर्शाया गया है, स्पष्टतः दूसरा ($360^0 - \theta$) है। उपरोक्त नियमों में से कोई भी नियम लगाते समय **a** एवं **b** के बीच का छोटा कोण ($<180^0$) लेकर नियम लगाना चाहिए। यहाँ यह θ है।

क्योंकि सदिश गुणन में, गुणा व्यक्त करने के लिए क्रॉस (×) चिह्न का उपयोग किया जाता है इसलिए इस गुणन को क्रॉस गुणन भी कहते हैं।

- ध्यान दें कि दो सदिशों का अदिश गुणन क्रमविनियम नियम का पालन करता है जैसा पहले बताया गया है **a.b** = **b.a**

परन्तु, सदिश गुणन क्रमविनिमय नियम का पालन नहीं करता, अर्थात् $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ एवं $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ के परिमाण समान ($ab \sin\theta$) हैं ; और ये दोनों ही उस तल के अभिलम्बवत् हैं जिसमें **a** एवं **b** विद्यमान है। लेकिन, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ के लिए दक्षिणावर्त पेंच को **a** से **b** की ओर घुमाना होता है जबकि $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ के लिए **b** से **a** की ओर। परिणामतः ये दो सदिश विपरीत दिशा में होते हैं

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

- सदिश गुणन का दूसरा रोचक गुण है इसका परावर्तन-गत व्यवहार। परावर्तन के अंतर्गत (यानि दर्पण में प्रतिबिम्ब लेने पर) हमें $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ और $z \rightarrow -z$ मिलते हैं। परिणामस्वरूप सभी सदिशों के अवयवों के चिह्न बदल जाते हैं और इस प्रकार $a \rightarrow -a,\ b \rightarrow -b$। देखें कि परावर्तन में $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का क्या होता है?

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

अतः परावर्तन से $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ का चिह्न नहीं बदलता।

- अदिश एवं सदिश दोनों ही गुणन सदिश-योग पर वितरणशील होते हैं। अतः

$\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

- हम $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ को अवयवों के रूप में भी लिख सकते हैं। इसके लिए हमें कुछ सदिश गुणनफलों की जानकारी आवश्यक होगी :

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (**0** एक शून्य सदिश है, यानि शून्य परिमाण वाला सदिश)

स्पष्टत: ऐसा इसलिए है क्योंकि **a** × **a** का परिमाण $a^2 \sin 0° = 0$ ।

इससे हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि

(i) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

ध्यान दें, कि $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ का परिमाण $\sin 90^0$ या 1 है, चूंकि $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ दोनों का परिमाण 1 है और उनके बीच 90^0 का कोण है। अत: $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ एक एकांक सदिश है। $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ के तल के अभिलम्बवत् दक्षिणावर्त पेंच के नियमानुसार ज्ञात करें तो इनसे संबंधित यह एकांक सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ है। इसी प्रकार आप यह भी पुष्ट कर सकते हैं कि

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad \text{और} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

सदिश गुणन के क्रम विनिमेयता गुण के आधार पर हम कह सकते हैं–

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\quad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

ध्यान दें कि उपरोक्त सदिश गुणन व्यंजकों में यदि $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ चक्रीय क्रम में आते हैं तो सदिश गुणन धनात्मक है और यदि चक्रीय क्रम में नहीं आते हैं तो सदिश गुणन ऋणात्मक है।

अब,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \times (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_x b_y \hat{\mathbf{k}} - a_x b_z \hat{\mathbf{j}} - a_y b_x \hat{\mathbf{k}} + a_y b_z \hat{\mathbf{i}} + a_z b_x \hat{\mathbf{j}} - a_z b_y \hat{\mathbf{i}}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

उपरोक्त व्यंजक प्राप्त करने में हमने सरल सदिश गुणनफलों का उपयोग किया है। **a** × **b** को व्यक्त करने वाले व्यंजक को हम एक डिटरमिनेंट (सारणिक) के रूप में लिख सकते हैं जो याद रखने में आसान है।

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

▶ *उदाहरण 6.4: दो सदिशों* $\mathbf{a} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})$ *एवं* $\mathbf{b} = (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$ *के अदिश एवं सदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।*

हल

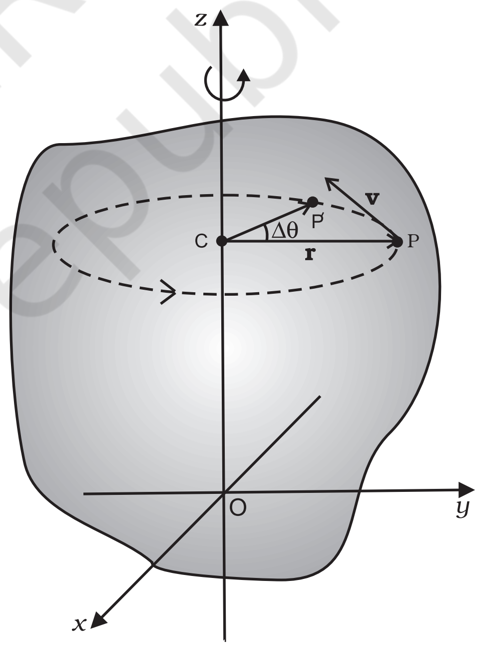
$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

ध्यान दें कि, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -7\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ ◀

6.6 कोणीय वेग और इसका रेखीय वेग से संबंध

इस अनुभाग में हम अध्ययन करेंगे कि कोणीय वेग क्या है, और घूर्णी गति में इसकी क्या भूमिका है? हम यह समझ चुके हैं कि घूर्णी गति में पिण्ड का प्रत्येक कण एक वृत्ताकार पथ पर चलता है। किसी कण का रेखीय वेग उसके कोणीय वेग से संबंधित होता है। इन दो राशियों के बीच का संबंध एक सदिश गुणन से व्यक्त होता है। सदिश गुणन के विषय में आपने पिछले अनुभाग में पढ़ा है।



चित्र 6.16 *एक स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन। स्थिर (z-) अक्ष के परित: घूमते दृढ़ पिण्ड के किसी कण P का वृत्ताकार पथ पर चलना। वृत्त का केन्द्र (C), अक्ष पर अवस्थित है।*

आइये चित्र 6.4 पुनः देखें। जैसा ऊपर बताया गया है, किसी दृढ़ पिण्ड की एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णी गति में, पिण्ड का प्रत्येक कण एक वृत्त में गति करता है। ये वृत्त अक्ष के लम्बवत् समतल में होते हैं जिनके केन्द्र अक्ष के ऊपर अवस्थित होते हैं। चित्र 6.16 में हमने चित्र 6.4 को फिर से बनाया है और इसमें स्थिर (z-) अक्ष के परितः घूमते, दृढ़ पिण्ड के, एक विशिष्ट कण को बिन्दु P पर दर्शाया है। यह कण एक वृत्त बनाता है जिसका केन्द्र C, अक्ष पर स्थित है। वृत्त की त्रिज्या r है, जो बिन्दु P की अक्ष से लम्बवत् दूरी है। चित्र में हमने P बिन्दु पर कण का रेखीय वेग सदिश $\mathbf{v}$ भी दर्शाया है। इसकी दिशा वृत्त के P बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है।

माना कि Δt समय अंतराल के बाद कण की स्थिति P' है (चित्र 6.16)। कोण PCP′, Δt समय में कण के कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ का माप है। Δt समय में कण का औसत कोणीय वेग $\Delta\theta/\Delta t$ है। जैसे–जैसे Δt का मान घटाते हुए शून्योन्मुख करते हैं, अनुपात $\Delta\theta/\Delta t$ का मान एक सीमांत मान प्राप्त करता है जो P बिन्दु पर कण का तात्क्षणिक कोणीय वेग $d\theta/dt$ है। *तात्क्षणिक कोणीय वेग* को हम ω से व्यक्त करते हैं। वृत्तीय गति के अध्ययन से हम जानते हैं कि रेखीय वेग सदिश का परिमाण υ एवं कोणीय वेग ω के बीच संबंध एक सरल समीकरण $\upsilon = \omega r$ द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

हमने देखा कि किसी दिए गए क्षण पर समीकरण $\upsilon = \omega r$ दृढ़ पिण्ड के सभी कणों पर लागू होती है। अतः स्थिर अक्ष से r_i दूरी पर स्थित किसी कण का, किसी क्षण पर, रेखीय वेग υ_i होगा

$$\upsilon_i = \omega r_i \tag{6.19}$$

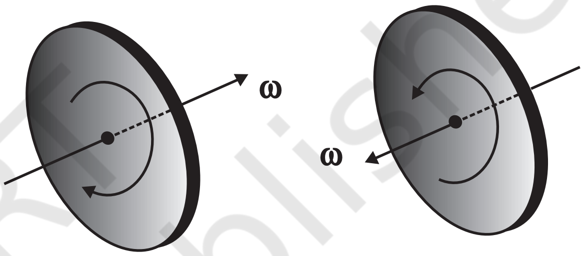
यहाँ भी सूचकांक i का मान 1 से n तक बदलता है, जहाँ n पिण्ड के कुल कणों की संख्या है।

अक्ष पर स्थित कणों के लिए $r = 0$, और इसलिए $\upsilon = \omega\, r = 0$। अतः अक्ष पर स्थित कण रेखीय गति नहीं करते। इससे यह पुष्ट होता है कि अक्ष *स्थिर* है।

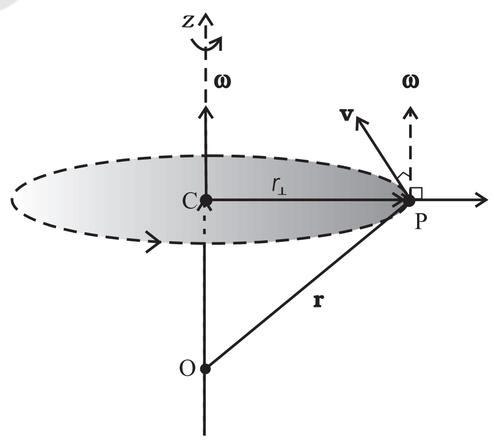
ध्यान दें कि हमने सभी कणों का समान कोणीय वेग लिया है। इसलिए *हम ω को पूरे पिण्ड का कोणीय वेग कह सकते हैं।*

किसी पिण्ड की *शुद्ध स्थानांतरण गति का अभिलक्षण हमने यह बताया कि इसके सभी कण, किसी दिए गए क्षण पर समान वेग से चलते हैं। इसी प्रकार, शुद्ध घूर्णी गति के लिए हम कह सकते हैं कि किसी दिए गए क्षण पर पिण्ड के सभी कण समान कोणीय वेग से घूमते हैं।* ध्यान दें कि स्थिर अक्ष के परितः घूमते दृढ़ पिण्ड की घूर्णी गति का यह अभिलक्षण, दूसरे शब्दों में (जैसा अनुभाग 6.1 में बताया गया है) पिण्ड का हर कण एक वृत्त में गति करता है और यह वृत्त अक्ष के अभिलम्बवत् तल में स्थित होता है जिसका केन्द्र अक्ष पर होता है।

हमारे अभी तक के विवेचन से ऐसा लगता है कि कोणीय वेग एक अदिश राशि है। किंतु तथ्य यह है, कि यह एक सदिश राशि है। हम इस तथ्य के समर्थन या पुष्टि के लिए कोई तर्क नहीं देंगे, बस यह मान कर चलेंगे। एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन में, कोणीय वेग सदिश, घूर्णन अक्ष के अनुदिश होता है, और उस दिशा में संकेत करता है जिसमें एक दक्षिणावर्त पेंच आगे बढ़ेगा जब उसके शीर्ष को पिण्ड के घूर्णन की दिशा में घुमाया जाएगा। देखिए चित्र 6.17(a)। इस सदिश का परिमाण, $\omega = d\theta/dt$, जैसा ऊपर बताया गया है।



चित्र 6.17(a) *यदि दक्षिणावर्त्त पेंच के शीर्ष को पिण्ड के घूर्णन की दिशा में घुमाया जाए तो पेंच कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा में आगे बढ़ेगा। यदि पिण्ड के घूर्णन की दिशा (वामावर्त या दक्षिणावर्त) बदलेगी तो $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा भी बदल जाएगी।*



चित्र 6.17 (b) *कोणीय वेग सदिश $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा स्थिर घूर्णन अक्ष के अनुदिश है। P बिन्दु पर स्थित कण का रेखीय वेग $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ है। यह $\boldsymbol{\omega}$ एवं $\boldsymbol{r}$ दोनों के लम्बवत् है और कण जिस वृत्त पर चलता है उसके ऊपर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है।*

आइये, अब हम सदिश गुणनफल $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ को ठीक से समझें और जानें कि यह क्या व्यक्त करता है। चित्र 6.17(b) को देखें, जो वैसे तो चित्र 6.16 का ही भाग है पर, यहाँ इसे कण P का पथ दर्शाने के लिए दोबारा बनाया गया है। चित्र में, स्थिर (z-) अक्ष के अनुदिश सदिश $\boldsymbol{\omega}$ और मूल बिन्दु O के सापेक्ष दृढ़ पिण्ड के बिन्दु P का स्थिति-सदिश $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ दर्शाया गया है। ध्यान दें कि मूल बिन्दु को घूर्णन अक्ष के ऊपर ही रखा गया है।

अब $\quad \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \quad (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$

लेकिन $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC} = \mathbf{0}$ क्योंकि के अनुदिश $\boldsymbol{\omega}$ $\mathbf{OC}$ है।

अतः $\quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$

सदिश $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$, $\boldsymbol{\omega}$ के लम्बवत् है, यानि z-अक्ष पर भी तथा कण P द्वारा बनाये गए वृत्त की त्रिज्या **CP** पर भी। अतः यह वृत्त के P बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है। $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$ का परिमाण ω (CP) है, क्योंकि $\boldsymbol{\omega}$ एवं **CP** एक दूसरे के लम्बवत् हैं। हमें **CP** को $\boldsymbol{r}_\perp$ से प्रदर्शित करना चाहिए ताकि इसके और $\mathrm{OP} = r$ के परिमाण में संभ्रम की स्थिति से बचा जा सके।

अतः $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण $\omega r_\perp$ है और जिसकी दिशा कण P द्वारा बनाये गए वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश है। यही बिन्दु P पर रेखीय वेग सदिश का परिमाण और दिशा है। अतः

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{r} \tag{6.20}$$

वास्तव में, समीकरण (6.20) उन दृढ़ पिण्डों की घूर्णन गति पर भी लागू होती है जो एक बिन्दु के परितः घूमते हैं, जैसे लट्टू का घूमना (चित्र 6.6(a))। इस तरह के मामलों में, **r** कण का स्थिति सदिश प्रदर्शित करता है जो स्थिर बिन्दु को मूल बिन्दु लेकर मापा गया हो।

ध्यान दें, *कि जब कोई वस्तु एक स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन करती है तो समय के साथ सदिश* $\boldsymbol{\omega}$ *की दिशा नहीं बदलती। हाँ, इसका परिमाण क्षण-क्षण पर बदलता रहता है। अधिक व्यापक घूर्णन के मामलों में* $\boldsymbol{\omega}$ *के परिमाण और दिशा दोनों समय के साथ बदलते रह सकते हैं।*

6.6.1 कोणीय त्वरण

आपने ध्यान दिया होगा कि हम घूर्णी गति संबंधी अध्ययन को भी उसी तरह आगे बढ़ा रहे हैं जिस तरह हमने अपने स्थानांतरण गति संबंधी अध्ययन को आगे बढ़ाया था और जिसके बारे में अब हम भली-भाँति परिचित हैं। स्थानांतरण गति की गतिज चर राशियों यथा रेखीय विस्थापन ($\Delta\mathbf{r}$) और रेखीय वेग ($\mathbf{v}$) के सदृश ही घूर्णी गति में कोणीय विस्थापन ($\boldsymbol{\theta}$) एवं कोणीय वेग ($\boldsymbol{\omega}$) की अवधारणाएं हैं। तब यह स्वाभाविक ही है कि जैसे हमने स्थानांतरीय गति में रेखीय त्वरण को वेग परिवर्तन की दर के रूप में परिभाषित किया था वैसे ही घूर्णी गति में कोणीय त्वरण को भी परिभाषित करें। अतः कोणीय त्वरण $\boldsymbol{\alpha}$ की परिभाषा, समय के सापेक्ष कोणीय वेग परिवर्तन की दर के रूप में कर सकते हैं। यानि,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{6.21}$$

यदि घूर्णन अक्ष स्थिर है तो $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा और इसलिए $\boldsymbol{\alpha}$ की दिशा भी स्थिर होगी। इस स्थिति में तब सदिश समीकरण अदिश समीकरण में बदल जाती है और हम लिख सकते हैं-

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{6.22}$$

6.7 बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग

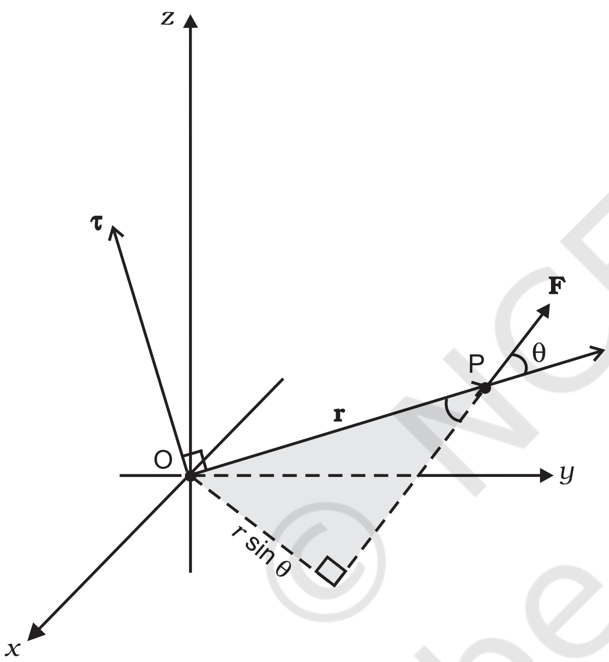
इस अनुभाग में, हम आपको ऐसी दो राशियों से अवगत करायेंगे जिनको दो सदिशों के सदिश गुणन के रूप में परिभाषित किया जाता है। ये राशियाँ, जैसा हम देखेंगे, कणों के निकायों, विशेषकर दृढ़ पिण्डों की गति का विवेचन करने में बहुत महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती हैं।

6.7.1 एक कण पर आरोपित बल का आघूर्ण

हमने सीखा है, कि किसी दृढ़ पिण्ड की गति, व्यापक रूप में, घूर्णन एवं स्थानांतरण का संयोजन होती है। यदि पिण्ड किसी बिन्दु या किसी रेखा के अनुदिश स्थिर है तो इसमें केवल घूर्णी गति होती है। हम जानते हैं कि किसी वस्तु की स्थानांतरीय गत्यावस्था में परिवर्तन लाने के लिए (यानि इसमें रेखीय त्वरण पैदा करने के लिए) बल की आवश्यकता होती है। तब स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि घूर्णी गति में बल के तुल्य रूप कौन सी राशि है? एक समग्र स्थिति द्वारा इस प्रश्न का उत्तर तलाशने के लिए आइये किसी द्वार को खोलने या बंद करने का उदाहरण लें। द्वार एक दृढ़ पिण्ड है जो कब्ज़ों से होकर गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः घूम सकता है। द्वार को कौन घुमाता है? यह तो स्पष्ट ही है कि जब तक दरवाजे पर बल नहीं लगाया जायेगा यह नहीं घूम सकता। किन्तु, किसी भी बल द्वारा यह कार्य किया जा सकता हो, ऐसा नहीं है। कब्ज़ों से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा पर लगने वाला बल, द्वार में कोई भी घूर्णन गति उत्पन्न नहीं कर सकता किंतु किसी दिए गए परिमाण का

द्वार को घुमाने में सबसे अधिक प्रभावी होता है। घूर्णी गति में बल का परिमाण ही नहीं, बल्कि, यह कहाँ और कैसे लगाया जाता है यह भी महत्वपूर्ण होता है।

घूर्णी गति में बल के समतुल्य राशि *बल आघूर्ण* है। इसको ऐंठन (टॉर्क) अथवा बल युग्म भी कहा जाता है। (हम बल आघूर्ण और टॉर्क शब्दों का इस्तेमाल एकार्थी मानकर करेंगे। पहले हम एकल कण के विशिष्ट मामले में बल आघूर्ण की परिभाषा देंगे। बाद में इस अवधारणा को आगे बढ़ाकर कणों के निकाय और दृढ़ पिण्डों के लिए लागू करेंगे। हम, घूर्णन गति में इसके कारण होने वाले परिवर्तन यानि दृढ़ पिण्ड के कोणीय त्वरण से इसका संबंध भी जानेंगे।



चित्र 6.18 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, *$\boldsymbol{\tau}$ उस तल के लम्बवत् है जिसमें $\mathbf{r}$ एवं $\mathbf{F}$ हैं, और इसकी दिशा दक्षिणावर्त पेंच के नियम द्वारा जानी जा सकती है।*

यदि, P बिन्दु पर स्थित किसी कण पर बल $\mathbf{F}$ लगा हो और मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु P का स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ हो (चित्र 6.18), तो मूल बिन्दु के सापेक्ष कण पर लगने वाले बल का आघूर्ण निम्नलिखित सदिश गुणनफल के रूप में परिभाषित किया जायेगा–

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{6.23}$$

बल आघूर्ण एक सदिश राशि है। इसका संकेत चिह्न ग्रीक वर्णमाला का एक अक्षर τ *टॉव* है। $\boldsymbol{\tau}$ का परिमाण है

$$\tau = rF\sin\theta \tag{6.24a}$$

जहाँ r स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ का परिमाण यानि OP की लंबाई है, F, बल $\mathbf{F}$ का परिमाण है तथा θ, $\mathbf{r}$ एवं $\mathbf{F}$ के बीच का लघु कोण है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है।

बल आघूर्ण का विमीय सूत्र $M L^2 T^{-2}$ है । इसकी विमायें वही हैं जो कार्य और ऊर्जा की। तथापि, यह कार्य से बिलकुल अलग भौतिक राशि है। बल आघूर्ण एक सदिश राशि है, जबकि, कार्य एक अदिश राशि है। बल आघूर्ण का S.I मात्रक न्यूटन मीटर (Nm) है। चित्र से स्पष्ट है कि बल आघूर्ण के परिमाण को हम लिख सकते हैं–

$$\tau = (r\sin\theta)F = r_\perp F \tag{6.24b}$$

या $$\tau = rF\sin\theta = rF_\perp \tag{6.24c}$$

जहाँ $r_\perp = r\sin\theta$ बल की क्रिया-रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है और $F_\perp (= F\sin\theta)$, $\mathbf{r}$ के लम्बवत् दिशा में $\mathbf{F}$ का अवयव है। ध्यान दें कि जब $r = 0$ या $F = 0$ या $\theta = 0^0$ अथवा 180^0 तब $\tau = 0$ । अतः यदि बल का परिमाण शून्य हो या बल मूल बिन्दु पर प्रभावी हो या बल की क्रिया रेखा मूल बिन्दु से गुजरती हो तो बल आघूर्ण शून्य हो जाता है।

आपका ध्यान इस बात की ओर जाना चाहिए कि $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ सदिश गुणन होने के कारण दो सदिशों के सदिश गुणनफल के सभी गुण इस पर भी लागू होते हैं। अतः यदि बल की दिशा उलट दी जायेगी तो बल आघूर्ण की दिशा भी उलटी हो जायेगी। परन्तु यदि $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ दोनों की दिशा उलट दी जाए तो बल आघूर्ण की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

6.7.2 किसी कण का कोणीय संवेग

जैसे बल आघूर्ण, रेखीय गति में बल का घूर्णी समतुल्य है, ठीक वैसे ही कोणीय संवेग, रेखीय संवेग का घूर्णी समतुल्य है। पहले हम एकल कण के विशिष्ट मामले में कोणीय संवेग को परिभाषित करेंगे और एकल कण की गति के संदर्भ में इसकी उपयोगिता देखेंगे। तब, कोणीय संवेग की परिभाषा को दृढ़ पिण्डों सहित कणों के निकायों के लिए लागू करेंगे।

बल आघूर्ण की तरह ही कोणीय संवेग भी एक सदिश गुणन है। इसको हम (रेखीय) संवेग का आघूर्ण कह सकते हैं। इस नाम से कोणीय संवेग की परिभाषा का अनुमान लगाया जा सकता है।

m द्रव्यमान और $\mathbf{p}$ रेखीय संवेग का एक कण लीजिए, मूल बिन्दु O के सापेक्ष, जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ हो। तब मूल बिन्दु O के सापेक्ष इस कण का कोणीय संवेग $\boldsymbol{l}$ निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित होगा–

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad (6.25a)$$

कोणीय संवेग सदिश की परिमाण है

$$l = r\,p \sin\theta \qquad (6.26a)$$

जहाँ p सदिश $\mathbf{p}$ का परिमाण है तथा θ $\mathbf{r}$ एवं $\mathbf{p}$ के बीच का लघु कोण है। इस समीकरण को हम लिख सकते हैं–

$$l = r\,p_{\perp} \text{ या } r_{\perp} p \qquad (6.26b)$$

जहाँ $r_{\perp}$ $(= r \sin\theta)$ सदिश $\mathbf{p}$ की दिशा रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी है और $p_{\perp} (= p \sin\theta)$, $\mathbf{r}$ की लम्बवत् दिशा में $\mathbf{p}$ का अवयव है। जब या तो रेखीय संवेग शून्य हो ($p = 0$) या कण मूल बिन्दु पर हो ($r = 0$) या फिर $\mathbf{p}$ की दिशा रेखा मूल बिन्दु से गुजरती हो $\theta = 0^0$ या 180^0) तब हम अपेक्षा कर सकते हैं कि कोणीय संवेग शून्य होगा ($l = 0$)।

भौतिक राशियों, बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग में एक महत्वपूर्ण पारस्परिक संबंध है। यह संबंध भी बल एवं रेखीय संवेग के बीच के संबंध का घूर्णी समतुल्य है। एकल कण के संदर्भ में यह संबंध व्युत्पन्न करने के लिए हम $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ को समय के आधार पर अवकलित करते हैं,

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

दाईं ओर के व्यंजक पर गुणन के अवकलन का नियम लागू करें, तो

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

अब, कण का वेग $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ एवं $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ लिखें, तो

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0,$$

क्योंकि दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है। तथा, चूंकि $d\mathbf{p} / dt = \mathbf{F}$,

$$\therefore \qquad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

अतः $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$

या, $$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad (6.27)$$

अतएव, किसी कण के कोणीय संवेग में समय के साथ होने वाले परिवर्तन की दर इस पर प्रभावी बल आघूर्ण के बराबर होती है। यह समीकरण $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, जो एकल कण की स्थानांतरीय गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम को व्यक्त करता है, का घूर्णी समतुल्य है।

कणों के निकाय का बल आघूर्ण एवं कोणीय संवेग

कणों के किसी निकाय का, किसी दिए गए बिन्दु के परितः कुल कोणीय संवेग ज्ञात करने के लिए हमें एकल कणों के कोणीय संवेगों के सदिश योग की गणना करनी होगी। अतः n कणों के निकाय के लिए,

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \ldots + \boldsymbol{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i$$

iवें कण का कोणीय संवेग होगा,

$$\boldsymbol{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

जहाँ, $\mathbf{r}_i$ दिए गए मूल बिन्दु के सापेक्ष iवें कण का स्थिति सदिश है और $\mathbf{p} = (m_i\mathbf{v}_i)$ उस कण का रेखीय संवेग है। (कण का द्रव्यमान m_i एवं वेग $\mathbf{v}_i$ है)। कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग को हम निम्नवत् लिख सकते हैं–

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (6.25b)$$

यह समीकरण (6.25a) में दी गई एकाकी कण के संवेग की परिभाषा का कणों के निकाय के लिए किया गया व्यापकीकरण है।

समीकरणों (6.23) और (6.25b)का उपयोग करें तो

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \boldsymbol{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad (6.28a)$$

जहाँ $\boldsymbol{\tau}_i$, i वें कण पर प्रभावी बल आघूर्ण है;

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

iवें कण पर लगने वाला बल $\mathbf{F}_i$, इस पर लगने वाले सभी बाह्य बलों $\mathbf{F}_i^{ext}$ एवं निकाय के दूसरे कणों द्वारा इस कण पर लगने वाले आंतरिक बलों $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$ का सदिश योग है। इसलिए, हम कुल बल आघूर्ण में बाह्य एवं आंतरिक बलों के योगदान को अलग-अलग कर सकते हैं।

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ अर्थात्}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{\text{int}},$$

जहाँ $$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$$

और $$\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{int}}$$

हम, न सिर्फ न्यूटन के गति का तृतीय नियम यानि यह तथ्य कि निकाय के किन्हीं दो कणों के बीच लगने वाले बल बराबर होते हैं और विपरीत दिशा में लगते हैं, बल्कि यह भी मानकर चलेंगे कि ये बल दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश लगते हैं। इस स्थिति में आंतरिक बलों का, निकाय के कुल बल आघूर्ण में योगदान शून्य होगा। क्योंकि, प्रत्येक क्रिया-प्रतिक्रिया

युग्म का परिणामी बल आघूर्ण शून्य है। अत: $\boldsymbol{\tau}_{int} = \mathbf{0}$ और इसलिए $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$

चूंकि $\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i$, समीकरण (6.28a) से निष्कर्ष निकलता है, कि

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \qquad (6.28\ b)$$

अत:, *कणों के किसी निकाय के कुल कोणीय संवेग में समय के अनुसार होने वाले परिवर्तन की दर उस पर आरोपित बाह्य बल आघूर्णों (यानि बाह्य बलो के आघूर्णों) के सदिश योग के बराबर होती है।* ध्यान रहे कि जिस बिन्दु (यहाँ हमारे संदर्भ-फ्रेम का मूल बिन्दु) के परित: कुल कोणीय संवेग लिया जाता है उसी के परित: बाह्य बल आघूर्णों की गणना की जाती है। समीकरण (6.28 b), कणों के निकाय के व्यापकीकृत कण की समीकरण (6.27) ही है। यह भी ध्यान देने की बात है कि एक कण के मामले में आंतरिक बलों या आंतरिक बल आघूर्णों का कोई अस्तित्व नहीं होता। समीकरण (6.28 b) निम्नलिखित समीकरण (6.17) का घूर्णी समतुल्य है।

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad (6.17)$$

ध्यान दें कि समीकरण (6.17) की तरह ही, समीकरण (6.28b) भी कणों के सभी निकायों के लिए लागू होती है चाहे वह पिण्ड दृढ़ हो या विभिन्न प्रकार की गतियों से युक्त पृथक पृथक कणों का निकाय।

कोणीय संवेग का संरक्षण

यदि $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{0}$, तो समीकरण (6.28b) रह जाती है

$$\therefore \quad \mathbf{L} = \text{अचरांक} \qquad (6.29a)$$

अत:, कणों के किसी निकाय पर आरोपित कुल बाह्य बल आघूर्ण यदि शून्य हो तो उस निकाय का कुल कोणीय संवेग संरक्षित होता है अर्थात् अचर रहता है। समीकरण (6.29a) तीन अदिश समीकरणों के समतुल्य है।

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2 \text{ एवं } L_z = K_3 \qquad (6.29\ b)$$

यहाँ K_1, K_2 एवं K_3 अचरांक हैं तथा L_x, L_y और L_z कुल कोणीय संवेग सदिश $\mathbf{L}$ के क्रमश: x, y एवं z दिशाओं में वियोजित अवयव हैं। यह कथन कि कुल कोणीय संवेग संरक्षित है, इसका यह भी अर्थ है कि ये तीनों अवयव भी संरक्षित हैं।

समीकरण (6.29a), समीकरण (6.18a) यानि कणों के निकाय के कुल रेखीय संवेग के संरक्षण के नियम, का घूर्णी समतुल्य है। समीकरण (6.18a) की तरह ही अनेक व्यावहारिक स्थितियों में इसके अनुप्रयोग हैं। इस अध्याय में कुछ रोचक अनुप्रयोगों की हम चर्चा करेंगे।

उदाहरण 6.5: मूल बिन्दु के परित:, बल $7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$ का बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए। बल जिस कण पर लगता है उसका स्थिति सदिश $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ है।

हल : यहाँ $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

एवं $\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$.

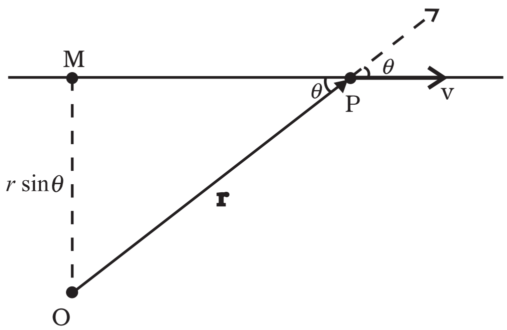
बलाघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ज्ञात करने के लिए हम डिटरमिनेंट हल करेंगे

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3-(-7))\hat{\mathbf{k}}$$

या $\boldsymbol{\tau} = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$

उदाहरण 6.6: दर्शाइये, कि अचर-वेग से चलते एकल कण का किसी बिन्दु के परित: कोणीय संवेग उसकी समस्त गति के दौरान अचर रहता है।

हल : माना कि कोई कण P किसी क्षण t पर, $\boldsymbol{v}$ वेग से चल रहा है। हम, इस कण का कोणीय संवेग, स्वेच्छ बिन्दु O के परित: ज्ञात करना चाहते हैं।



चित्र 6.19

कोणीय संवेग $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ है। इसका परिमाण $mvr\sin\theta$ है, जहाँ θ, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{v}$ के बीच का कोण है (देखिए चित्र 6.19)। यद्यपि कण समय के साथ अपनी स्थिति बदल रहा है, फिर भी, $\mathbf{v}$ की दिशा रेखा वही बनी रहती है और इसलिए OM = $r\sin\theta$ अचर है।

l की दिशा, **r** एवं **v** के तल के अभिलम्बवत्, पृष्ठ के अंदर की ओर जाती हुई है। यह दिशा भी नहीं बदलती।

अत:, **l** का परिमाण एवं दिशा वही रहती है और इसलिए यह संरक्षित है। क्या कण पर कोई बाह्य बल आरोपित है?

6.8 दृढ़ पिण्डों का संतुलन

अब हम व्यापक कण-निकायों के बजाय दृढ़ पिण्डों की गति पर अपना ध्यान केंद्रित करेंगे।

आइये, स्मरण करें कि दृढ़ पिण्डों पर बाह्य बलों के क्या प्रभाव होते हैं? (आगे से हम विशेषण 'बाह्य' का प्रयोग नहीं करेंगे। जब तक अन्यथा न कहा जाय, हम केवल बाह्य बलों और बल आघूर्णों से ही व्यवहार करेंगे)। बल, किसी दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरीय गत्यावस्था में परिवर्तन लाते हैं, अर्थात् वे समीकरण (6.17) के अनुसार, इसके कुल रेखीय संवेग को परिवर्तित करते हैं। लेकिन, बलों का यह एकमात्र प्रभाव नहीं है। यदि पिण्ड पर लगने वाला कुल बल आघूर्ण शून्य न हो तो इसके कारण, दृढ़ पिण्ड की घूर्णी गति में परिवर्तन होगा अर्थात् पिण्ड का कुल कोणीय संवेग समीकरण (6.28b) के अनुसार बदलेगा।

किसी दृढ़ पिण्ड को यांत्रिक संतुलन की अवस्था में तब कहा जाएगा जब इसके रेखीय संवेग और कोणीय संवेग दोनों का ही मान समय के साथ न बदलता हो यानि उस पिण्ड में न रेखीय त्वरण हो न कोणीय त्वरण। इसका अर्थ होगा कि

(1) पिण्ड पर लगने वाला कुल बल यानि बलों का सदिश योग शून्य हो :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \qquad (6.30a)$$

यदि पिण्ड पर लगने वाला कुल बल शून्य होगा तो उस पिण्ड के रेखीय संवेग में समय के साथ कोई परिवर्तन नहीं होगा। समीकरण (6.30a) पिण्ड के स्थानांतरीय संतुलन की शर्त है।

(2) कुल बल आघूर्ण, यानि दृढ़-पिण्ड पर लगने वाले बल-आघूर्णों का सदिश योग शून्य होगा :

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \ldots + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \qquad (6.30b)$$

यदि दृढ़ पिण्ड पर आरोपित कुल बल आघूर्ण शून्य हो तो इसका कुल कोणीय संवेग समय के साथ नहीं बदलेगा। समीकरण (6.30b) पिण्ड के घूर्णी संतुलन की शर्त है।

अब यह प्रश्न उठ सकता है, कि यदि वह मूल बिन्दु जिसके परित: आघूर्णों की गणना की गई है बदल जाए, तो क्या घूर्णी संतुलन की शर्त बदलेगी? यह दिखाया जा सकता है कि यदि किसी दृढ़ पिण्ड के लिए स्थानांतरीय संतुलन की शर्त समीकरण (6.30b) लागू होती है तो इस पर मूल बिन्दु के स्थानांतरण का कोई प्रभाव नहीं होगा अर्थात् घूर्णी संतुलन की शर्त उस मूल बिन्दु की स्थिति के ऊपर निर्भर नहीं करती जिसके परित: आघूर्ण लिए गए हैं। उदाहरण 6.7, में बलयुग्म (यानि स्थानांतरीय संतुलन में, किसी पिण्ड के ऊपर लगने वाले बलों का एक जोड़ा) के विशिष्ट मामले में इस तथ्य की पुष्टि की जाएगी। n बलों के लिए इस परिणाम का व्यापक व्यंजक प्राप्त करना आपके अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है।

समीकरण (6.30a) एवं समीकरण (6.30b) दोनों ही सदिश समीकरणें हैं। इनमें से प्रत्येक तीन अदिश समीकरणों के समतुल्य हैं। समीकरण (6.30a) के संगत ये समीकरणें हैं

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \text{ एवं } \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (6.31a)$$

जहाँ F_{ix}, F_{iy} एवं F_{iz} बल $\mathbf{F}_i$ के क्रमश: x, y एवं z दिशा में वियोजित अवयव हैं। इसी प्रकार, समीकरण (6.30b) जिन तीन अदिश समीकरणों के समतुल्य हैं, वे हैं

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0, \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \text{ एवं } \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \qquad (6.31b)$$

जहाँ τ_{ix}, τ_{iy} एवं τ_{iz} क्रमश: x, y एवं z दिशा में बल आघूर्ण τ_i के अवयव हैं।

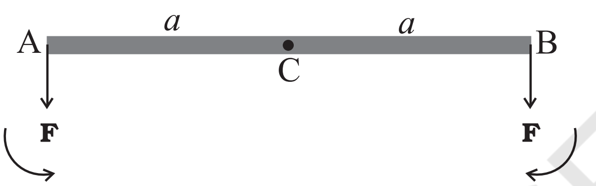
समीकरण (6.31a) एवं (6.31b), हमें किसी दृढ़ पिण्ड के यांत्रिक संतुलन के लिए आवश्यक छ: ऐसी शर्तें बताते हैं जो एक दूसरे के ऊपर निर्भर नहीं करतीं। बहुत सी समस्याओं में किसी पिण्ड पर लगने वाले सभी बल एक ही तल में होते हैं। इस स्थिति में यांत्रिक संतुलन के लिए केवल तीन शर्तों को पूरी किए जाने की आवश्यकता होगी। इनमें से दो शर्तें स्थानांतरीय संतुलन के संगत होंगी, जिनके अनुसार, सभी बलों के, इस तल में स्वेच्छ चुनी गई दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के अनुदिश, अवयवों का सदिश योग अलग-अलग शून्य होगा। तीसरी शर्त घूर्णी-संतुलन के संगत है। बलों के तल के अभिलम्बवत् अक्ष के अनुदिश बल आघूर्ण के अवयवों का योग शून्य होना चाहिए।

एक दृढ़ पिण्ड के संतुलन की शर्तों की तुलना, एकल कण के संतुलन की शर्तों से की जा सकती है। इस विषय में हमने पहले के अध्यायों में बात की है। कण पर घूर्णी गति का कोई विचार आवश्यक नहीं होता। इसके संतुलन के लिए केवल स्थानांतरीय संतुलन की शर्तें

(समीकरण 6.30 a) ही पर्याप्त हैं। अतः किसी कण के संतुलन के लिए इस पर आरोपित सभी बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए। क्योंकि ये सब बल एक ही कण पर कार्य करते हैं इसलिए संगामी भी होते हैं। संगामी बलों के तहत संतुलन का विवेचन पहले के अध्यायों में किया जा चुका है।

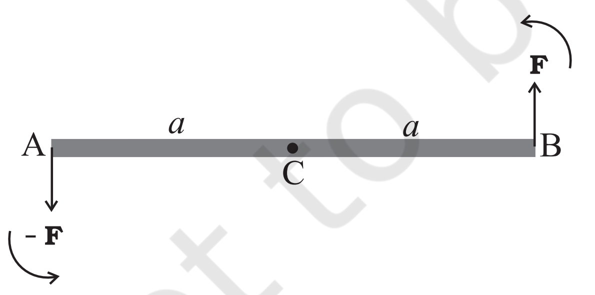
ज्ञातव्य है कि एक पिण्ड आंशिक संतुलन में हो सकता है यानि यह हो सकता है कि यह स्थानांतरीय संतुलन में हो परन्तु घूर्णी संतुलन में न हो या फिर घूर्णी संतुलन में तो हो पर स्थानांतरीय संतुलन में ना हो।

एक हलकी (यानि नगण्य द्रव्यमान वाली) स्वतंत्र छड़ (AB) पर विचार कीजिए, जिसके दो सिरों (A एवं B) पर, बराबर परिमाण वाले दो समांतर बल, (जो समान दिशा में लगे हों) **F**, चित्र 6.20(a) में दर्शाये अनुसार, छड़ के लम्बवत् लगे हों।



चित्र 6.20(a)

माना कि छड़ AB का मध्य बिन्दु C है और CA = CB = a है। A एवं B पर लगे बलों के C के परितः आघूर्ण, परिमाण में समान (aF) हैं, पर जैसा चित्र में दिखाया गया है, विपरीत दिशाओं में प्रभावकारी हैं। छड़ पर कुल बल आघूर्ण शून्य होगा। निकाय घूर्णी संतुलन में है, पर यह स्थानांतरीय संतुलन में नहीं है, क्योंकि $\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ ।



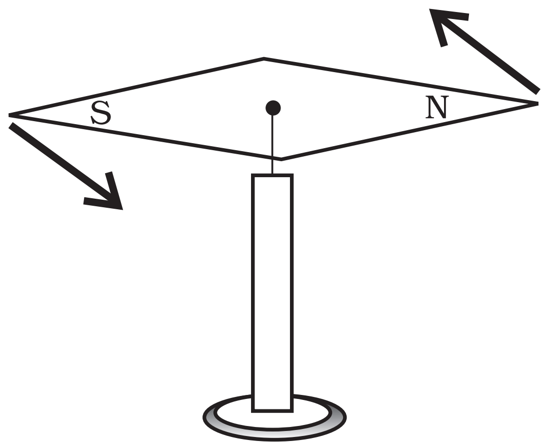
चित्र 6.20(b)

चित्र 6.20(b) में, चित्र (6.20a) में B सिरे पर लगाए गए बल की दिशा उलट दी गई है। अब उसी छड़ पर किसी क्षण पर बराबर परिमाण के दो बल, विपरीत दिशाओं में, छड़ के लम्बवत् लगे हैं एक A सिरे पर और दूसरा B सिरे पर। यहाँ दोनों बलों के आघूर्ण बराबर तो हैं पर वे विपरीत दिशा में नहीं हैं; वे एक ही दिशा में हैं और छड़ में वामावर्त घूर्णन की प्रवृत्ति लाते हैं। छड़ पर लगने वाला कुल बल शून्य है। अतः छड़ स्थानांतरीय संतुलन में है, लेकिन यह घूर्णी संतुलन में नहीं है। यद्यपि यह छड़ किसी भी तरह से स्थिर नहीं की गई है, इसमें शुद्ध घूर्णी संभव होती है (यानि स्थानांतरण रहित घूर्णन गति)।

दो बराबर परिमाण के, विपरीत दिशाओं में लगे बलों का जोड़ा जिनकी क्रिया रेखाएँ एक न हों *बलयुग्म* अथवा ऐंठन (टॉर्क) कहलाता है। बलयुग्म बिना स्थानांतरण के घूर्णन पैदा करता है।

जब हम घुमाकर किसी बोतल का ढक्कन खोलते हैं तो हमारी उंगलियाँ ढक्कन पर एक बलयुग्म आरोपित करती हैं। [चित्र 6.21(a)]। इसका दूसरा उदाहरण पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र में रखी चुम्बकीय सुई है [चित्र 6.21(b)]। पृथ्वी का चुम्बकीय क्षेत्र, चुम्बकीय सुई के उत्तरी और दक्षिणी ध्रुवों पर बराबर बल लगाता है। उत्तरी ध्रुव पर लगा बल उत्तर दिशा की ओर एवं दक्षिणी ध्रुव पर लगा बल दक्षिणी दिशा की ओर होता है। उस अवस्था के अतिरिक्त जब सुई उत्तर-दक्षिण दिशा में संकेत करती हो, दोनों बलों की क्रिया रेखा एक नहीं होती। अतः उस पर, पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र के कारण, एक बलयुग्म प्रभावी होता है।

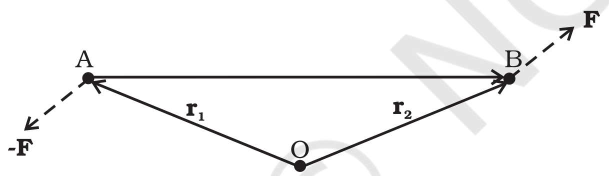
चित्र 6.21(a) ढक्कन को घुमाने के लिए हमारी उंगलियाँ उस पर एक बलयुग्म लगाती हैं



चित्र 6.21(b) *पृथ्वी का चुम्बकीय क्षेत्र, सुई के ध्रुवों पर, बराबर परिमाण वाले दो बल विपरीत दिशाओं में लगाता है। ये दो बल एक बलयुग्म बनाते हैं।*

▶ ***उदाहरण 6.7:*** दर्शाइये कि किसी बलयुग्म का आघूर्ण उस बिन्दु के ऊपर निर्भर नहीं करता जिसके परितः आप आघूर्ण ज्ञात करते हैं।

हल



चित्र 6.22

एक दृढ़ पिण्ड लीजिए जिस पर चित्र 6.22 में दिखाये अनुसार बलयुग्म लगा है। बल **F** एवं -**F** क्रमशः बिन्दु B और A पर लगे हैं। मूल बिन्दु O के सापेक्ष इन बिन्दुओं के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_2$ एवं $\mathbf{r}_1$ हैं। आइये, मूल बिन्दु के परितः बलों के आघूर्ण ज्ञात करें।

बलयुग्म का आघूर्ण = युग्म बनाने वाले बलों के आघूर्णों का योग

$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$

$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$

$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$

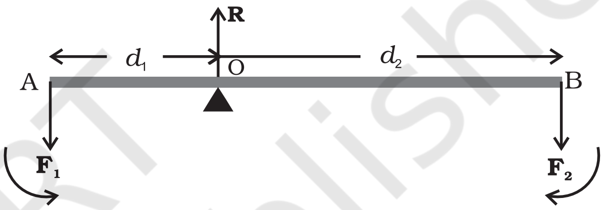
लेकिन $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$, $\therefore\ \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

बलयुग्म का आघूर्ण $= \mathbf{AB} \times \mathbf{F}$

स्पष्टतः, यह मान मूल बिन्दु यानि वह बिन्दु जिसके परितः हमने बलों के आघूर्ण लिए हैं उसकी स्थिति पर निर्भर नहीं करता। ◀

6.8.1 आघूर्णों का सिद्धांत

एक आदर्श *उत्तोलक*, अनिवार्य रूप से, एक ऐसी हलकी (यानि नगण्य द्रव्यमान वाली) छड़ है जो अपनी लम्बाई के अनुदिश लिए गए किसी बिन्दु के परितः घूम सकती हो। यह बिन्दु *आलम्ब* कहलाता है। बच्चों के खेल के मैदान में लगा सी-सा, उत्तोलक का एक प्रतिनिधिक उदाहरण है। दो बल F_1 एवं F_2, जो एक दूसरे के समांतर हैं उत्तोलक के सिरों पर, इसके लम्बवत् तथा आलम्ब से क्रमशः d_1 एवं d_2 दूरियों पर लगाये गए हैं जैसा चित्र 6.23 में दर्शाया गया है।



चित्र 6.23

यह उत्तोलक यांत्रिक रूप से एक संतुलित निकाय है। माना कि आलम्ब पर बलों का प्रतिक्रिया बल R है। यह बलों F_1 एवं F_2 की विपरीत दिशा में प्रभावी है। स्थानांतरीय संतुलन के लिए,

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

और घूर्णी संतुलन में, आलम्ब के परितः आघूर्ण लेने पर, इन आघूर्णों का योग शून्य होगा। अतः

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

सामान्यतः वामावर्त आघूर्णों को धनात्मक एवं दक्षिणावर्त आघूर्णों को ऋणात्मक लिया जाता है। ध्यान दें कि R आलम्ब, पर ही कार्यरत है और इसका आघूर्ण शून्य है।

उत्तोलक के मामले में, F_1 प्रायः कोई लोड होता है जिसे उठाना होता है इसे *भार* कहते हैं। आलम्ब से इसकी दूरी d_1 *भार की भुजा* कहलाती है। बल F_2, लोड को उठाने के लिए लगाया गया बल, *प्रयास* है। आलम्ब से इसकी दूरी *प्रयास भुजा* कहलाती है।

समीकरण (ii) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad \text{(6.32a)}$$

या, भार × भार की भुजा = प्रयास × प्रयास की भुजा

उपरोक्त समीकरण, किसी उत्तोलक के लिए आघूर्णों का नियम व्यक्त करती है। अनुपात F_1/F_2 यांत्रिक लाभ (M.A) कहलाता है।

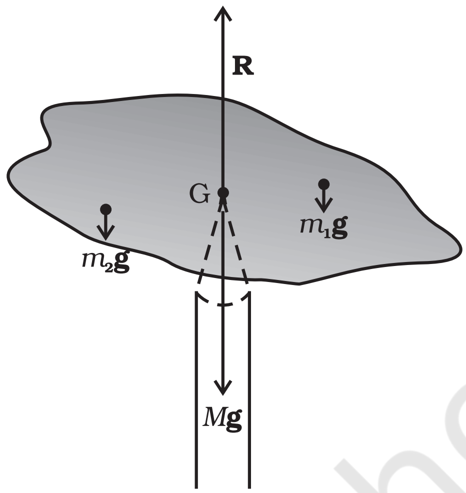
अतः $$\text{M.A.} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (6.32b)$$

यदि प्रयास भुजा d_2 की लम्बाई, भार-भुजा d_1 से अधिक हो, तो यांत्रिक लाभ एक से अधिक होता है। यांत्रिक लाभ एक से अधिक होने का अर्थ होता है कि कम प्रयास से अधिक भार उठाया जा सकता है। सी-सा के अतिरिक्त भी आपके इर्द-गिर्द उत्तोलकों के बहुत से उदाहरण आपको मिल जायेंगे। तुलादण्ड भी एक उत्तोलक ही है। कुछ अन्य उत्तोलकों के उदाहरण अपने परिवेश से ढूँढ़िए। प्रत्येक के लिए उनके आलम्ब, भार, भार-भुजा, प्रयास और प्रयास-भुजा की पहचान कीजिए।

आप यह सरलता से दर्शा सकते हैं कि यदि समांतर बल F_1 और F_2 उत्तोलक के लम्बवत् न हों बल्कि कोई कोण बनाते हुए लगे हों तब भी आघूर्णों का नियम लागू होता है।

6.8.2 गुरुत्व केन्द्र

आपमें से कई लोगों ने अपनी नोट बुक को अपनी उंगली की नोक पर संतुलित किया होगा। चित्र 6.24 उसी तरह का एक क्रियाकलाप है जो आप आसानी से कर सकते हैं। एक अनियमित आकार का M द्रव्यमान वाला गत्ते का टुकड़ा और पेंसिल जैसी कोई बारीक नोक वाली वस्तु लो। कुछ बार प्रयास करके आप गत्ते के टुकड़े में एक ऐसा बिन्दु G ढूँढ़ सकते हैं जिसके नीचे पेंसिल की नोक रखने पर गत्ते का टुकड़ा उस नोक पर संतुलित हो जाएगा। (इस स्थिति में गत्ते का टुकड़ा पूर्णतः क्षैतिज अवस्था में रहना चाहिए)। यह संतुलन बिन्दु गत्ते के टुकड़े का गुरुत्व केन्द्र (CG) है। पेंसिल की नोक ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर लगने वाला एक बल प्रदान करती है जिसके कारण गत्ते का टुकड़ा यांत्रिक संतुलन में आ जाता है। जैसा चित्र 6.24 में दर्शाया गया है, पेंसिल की नोक का प्रतिक्रिया बल R गत्ते के टुकड़े के कुल भार $M\mathbf{g}$ के बराबर और विपरीत है और इसलिए यह स्थानांतरीय संतुलनावस्था में है। साथ ही यह घूर्णी संतुलन में भी है। क्योंकि, अगर ऐसा न होता तो असंतुलित बल आघूर्ण के कारण यह एक ओर झुक जाता और गिर जाता। गुरुत्व बल के कारण गत्ते के टुकड़े पर बहुत से बल आघूर्ण प्रभावी हैं क्योंकि एकाकी कणों के भार $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ .... आदि G से विभिन्न दूरियों पर कार्य कर रहे हैं।



चित्र 6.24 गत्ते के टुकड़े को पेंसिल की नोक पर संतुलित करना। पेंसिल की नोक गत्ते के टुकड़े का गुरुत्व केन्द्र निर्धारित करती है।

गत्ते के टुकड़े का गुरुत्व केन्द्र इस प्रकार निर्धारित किया गया है कि $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ .... आदि बलों का इसके परितः लिया गया आघूर्ण शून्य है।

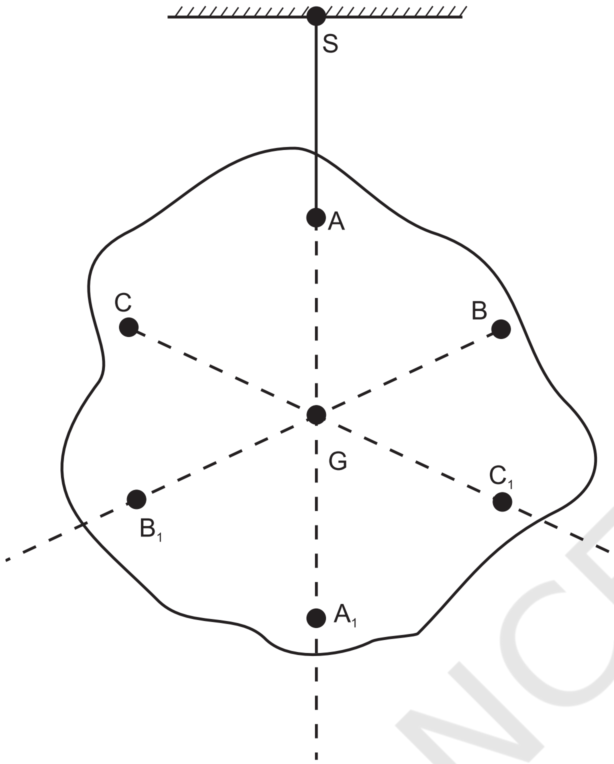
यदि $\mathbf{r}_i$ गुरुत्व केन्द्र के सापेक्ष किसी पिण्ड के i-वें कण का स्थिति सदिश हो, तो इस पर लगने वाले गुरुत्व बल का गुरुत्व केन्द्र के परितः बल आघूर्ण $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \; m_i\mathbf{g}$। गुरुत्व केन्द्र के परितः कुल गुरुत्वीय बल आघूर्ण शून्य होने के कारण

$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad (6.33)$$

इसलिए, किसी पिण्ड के गुरुत्व-केन्द्र को हम एक ऐसे बिन्दु के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जिसके परितः पिण्ड का कुल गुरुत्वीय बल आघूर्ण शून्य हो।

हम देखते हैं कि समीरकण (6.33) में $\mathbf{g}$ सभी कणों के लिए समान है अतः यह योग-चिन्ह $\sum$ से बाहर आ सकता है। अतः, $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$। याद रखिए कि स्थिति सदिश ($\mathbf{r}_i$) गुरुत्व केन्द्र के सापेक्ष नापे गए हैं। अब अनुभाग 6.2 की समीकरण (6.4a) के अनुसार यदि $\sum m_i\mathbf{r}_i = 0$, तो मूल बिन्दु पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र होना चाहिए। अतः पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र एवं द्रव्यमान केन्द्र एक ही है। हमारे ध्यान में यह बात आनी चाहिए कि ऐसा इसलिए है, क्योंकि, वस्तु का आकार इतना छोटा है कि इसके सभी बिन्दुओं के लिए $\mathbf{g}$ का मान समान है। यदि पिण्ड इतना बड़ा हो जाए कि इसके एक भाग की तुलना में दूसरे भाग के लिए $\mathbf{g}$ का मान बदल जाए तब गुरुत्व केन्द्र एवं द्रव्यमान

केन्द्र सम्पाती नहीं होंगे। मूल रूप में, ये दो अलग-अलग अवधारणाएँ हैं। द्रव्यमान केन्द्र का गुरुत्व से कुछ लेना देना नहीं है। यह केवल पिण्ड में द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है।



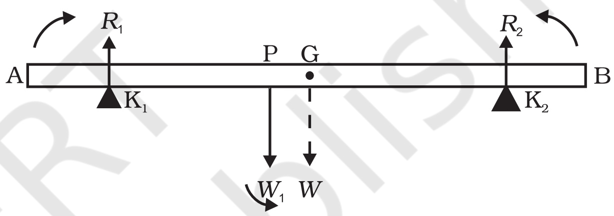
चित्र 6.25 *अनियमित आकार के फलक का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात करना। फलक का गुरुत्व केन्द्र G इसको A कोने से लटकाने पर इससे होकर गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा पर पड़ता है।*

अनुभाग 6.2 में हमने कई नियमित, समांग, पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात की थी। स्पष्टत:, यदि पिण्ड विशालकाय नहीं है, तो उसी विधि से हम उनके गुरुत्व केन्द्र ज्ञात कर सकते हैं।

चित्र 6.25, गत्ते के टुकड़े जैसे किसी अनियमित आकार के फलक का गुरुत्व केन्द्र ज्ञात करने की एक अन्य विधि दर्शाता है। यदि आप इस फलक को किसी बिन्दु जैसे A से लटकायें तो A से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा गुरुत्व केन्द्र से गुजरेगी। हम इस ऊर्ध्वाधर रेखा AA_1, को अंकित कर लेते हैं। अब हम फलक को किसी दूसरे बिन्दु जैसे B या C से लटकाते हैं। इन दो ऊर्ध्वाधर रेखाओं का कटान बिन्दु गुरुत्व केन्द्र है। समझाइये कि यह विधि क्यों प्रभावी होती है? चूंकि यहाँ पिण्ड छोटा सा ही है अत: इस विधि से इसका द्रव्यमान केन्द्र भी ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 6.8: 70 सेंटीमीटर लंबी और 4.00 kg द्रव्यमान की धातु की छड़ के दोनों सिरों से 10 सेंटीमीटर दूर रखे दो क्षुर-धारों पर टिकी है। इसके एक सिरे से 40 सेंटीमीटर की दूरी पर 6.00 kg द्रव्यमान का एक भार लटकाया गया है। क्षुर-धारों पर लगने वाले प्रतिक्रिया बलों की गणना कीजिए। (छड़ को समांग और समान अनुप्रस्थ काट वाली मान सकते हैं।)

हल :



चित्र 6.26

चित्र 6.26 में छड़ को AB से दर्शाया गया है। K_1 एवं K_2 क्षुर-धारों की स्थिति दर्शाते हैं। G एवं P क्रमशः गुरुत्व केन्द्र एवं लटकाये गए बल की स्थितियाँ हैं।

ध्यान दें कि छड़ का भार W इसके गुरुत्व केन्द्र G पर कार्य करता है। छड़ समान अनुप्रस्थ काट वाली और समांग द्रव्य से बनी है इसलिए G इसका केन्द्र है। AB = 70 cm. AG = 35 cm, AP = 30 cm, PG = 5 cm, $AK_1 = BK_2$ = 10 cm और $K_1G = K_2G$ = 25 cm एवं W = छड़ का भार = 4.00 kg तथा W_1= लटकाया गया भार = 6.00 kg; R_1 एवं R_2 क्षुर-धारों के आधारों के अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल हैं।

छड़ के स्थानांतरीय संतुलन के लिए

$$R_1 + R_2 - W_1 - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

ध्यान दें कि W_1 एवं W ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर तथा R_1 एवं R_2 ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर लगते हैं।

घूर्णी संतुलन की दृष्टि से हम बलों के आघूर्ण ज्ञात करते हैं। एक ऐसा बिन्दु जिसके परित: आघूर्ण ज्ञात करने से सुविधा रहेगी G है। R_2 और W_1 के आघूर्ण वामावर्त (धनात्मक) हैं, जबकि R_1 का आघूर्ण दक्षिणावर्त (ऋणात्मक) है।

अत: घूर्णी संतुलन के लिए

$-R_1\,(K_1G) + W_1\,(PG) + R_2\,(K_2G) = 0$ (ii)

यह दिया गया है कि $W = 4.00g$ N, $W_1 = 6.00g$ N, जहाँ g = गुरुत्व के कारण त्वरण $g = 9.8$ m/s².

समीकरण (i) में आंकिक मान प्रतिस्थापित करने पर,

$R_1 + R_2 - 4.00g - 6.00g = 0$

या $R_1 + R_2 = 10.00g$ N (iii)

$= 98.00$ N

समीकरण (ii) से $-0.25\,R_1 + 0.05\,W_1 + 0.25\,R_2 = 0$

या $R_1 - R_2 = 1.2g$ N $= 11.76$ N (iv)

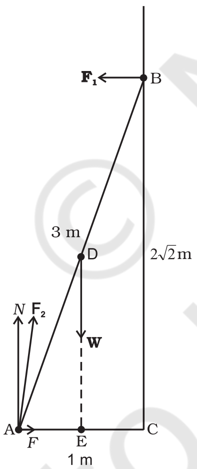
समीकरण (iii) and (iv) से $R_1 = 54.88$ N,
$R_2 = 43.12$ N

अतः क्षुर-धारों के आधारों के प्रतिक्रिया बल हैं-

K_1 पर 55 N तथा K_2 पर 43 N ◀

▶ **उदाहरण 6.9:** 20 kg द्रव्यमान की एक 3 m लंबी सीढ़ी एक घर्षणविहीन दीवार के साथ झुका कर टिकाई गई है। जैसा चित्र 6.27 में दर्शाया गया है, इसका निचला सिरा फर्श पर दीवार से 1 m की दूरी पर है। दीवार और फर्श के प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए।

हल



चित्र 6.27

सीढ़ी AB की लंबाई = 3 m, इसके पैरों की दीवार से दूरी AC = 1 m, पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार BC = $2\sqrt{2}$ m। सीढ़ी पर लगने वाले बल हैं – इसके गुरुत्व केन्द्र D पर प्रभावी इसका भार W। दीवार और फर्श के प्रतिक्रिया बल F_1 एवं F_2। बल F_1 दीवार पर अभिलम्बवत् है, क्योंकि, दीवार घर्षणविहीन है। बल F_2 को दो अवयवों में वियोजित किया जा सकता है –अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल N एवं घर्षण बल F। ध्यान दें कि F सीढ़ी को दीवार से दूर फिसलने से रोकता है इसलिए इसकी दिशा दीवार की ओर है।

स्थानांतरीय संतुलन के लिए, ऊर्ध्वाधर बलों का योग शून्य करने पर

$N - W = 0$ (i)

इसी प्रकार क्षैतिज बल लें तो,

$F - F_1 = 0$ (ii)

घूर्णी संतुलन के कारण बिन्दु A के परितः आघूर्ण लेने पर

$2\sqrt{2}\,F_1 - (1/2)\,W = 0$ (iii)

अब, $W = 20\,g = 20 \quad 9.8$ N $= 196.0$ N
($g = 9.8$ m/s²)

समीकरण (i) से $N = 196.0\ N$

समीकरण (iii) से

$$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6\,\text{N}$$

समीकरण (ii) से $F = F_1 = 34.6$ N

अतः $F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0$ N

बल F_2, क्षैतिज से α कोण बनाता है

$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}$, $\alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80$ ◀

6.9 जड़त्व आघूर्ण

हम पहले ही यह उल्लेख कर चुके हैं कि घूर्णी गति का अध्ययन हम स्थानांतरण गति के समांतर ही चलायेंगे। इस विषय में आप पहले से ही सुपरिचित हैं। इस संबंध में एक मुख्य प्रश्न का उत्तर देना अभी शेष है कि *घूर्णी गति में द्रव्यमान के समतुल्य राशि क्या है?* इस प्रश्न का उत्तर हम प्रस्तुत अनुभाग में देंगे। विवेचना को सरल बनाए रखने के लिए हम केवल स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन पर ही विचार करेंगे। आइये, *घूर्णन करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा* के लिए व्यंजक प्राप्त करें। हम जानते हैं कि स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन करते पिण्ड का प्रत्येक कण, एक वृत्ताकार पथ पर चलता है (देखें चित्र 6.16)। और अक्ष से r_i दूरी पर स्थित कण का रेखीय वेग, जैसा समीकरण (6.19) दर्शाती है, $\upsilon_i = r_i\omega$ है। इस कण की गतिज ऊर्जा है

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

जहाँ m_i कण का द्रव्यमान है। पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा K इसके पृथक-पृथक कणों की गतिज ऊर्जाओं का योग है।

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2\omega^2)$$

यहाँ n पिण्ड के कुल कणों की संख्या है। ज्ञातव्य है कि ω सभी कणों के लिए समान है अत: ω^2 को योग-चिह्न के बाहर निकाल सकते हैं। तब,

$$K = \frac{1}{2}\omega^2(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2)$$

हम दृढ़ पिण्ड को अभिलक्षित करने वाला एक नया प्राचल परिभाषित करते हैं जिसका नाम जड़त्व आघूर्ण है और जिसका व्यक्तिकरण है

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (6.34)$$

इस परिभाषा के साथ

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6.35)$$

ध्यान दें कि प्राचल I कोणीय वेग के परिमाण पर निर्भर नहीं करता। यह दृढ़ पिण्ड और उस अक्ष का अभिलक्षण है जिसके परित: पिण्ड घूर्णन करता है।

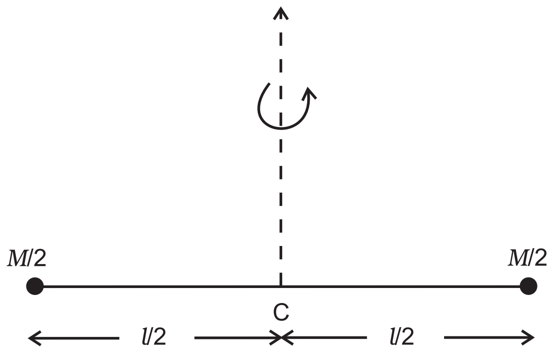
समीकरण (6.35) द्वारा व्यक्त घूर्णन करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा की रेखीय (स्थानांतरीय) गति करते पिण्ड की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$ से तुलना कीजिए। यहाँ m पिण्ड का द्रव्यमान और v उसका वेग है। कोणीय वेग ω (किसी स्थिर अक्ष के घूर्णन के संदर्भ में) और रेखीय वेग v (रेखीय गति के संदर्भ में) की समतुल्यता हम पहले से ही जानते हैं। अत: यह स्पष्ट है कि जड़त्व आघूर्ण I, प्राचल द्रव्यमान का घूर्णी समतुल्य है। (स्थिर अक्ष के परित:) घूर्णन में जड़त्व आघूर्ण वही भूमिका अदा करता है जो रेखीय गति में द्रव्यमान।

अब हम समीकरण (6.34) में दी गई परिभाषा का उपयोग दो सरल स्थितियों में जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिए करेंगे।

a) त्रिज्या R और द्रव्यमान M के एक पतले वलय पर विचार कीजिए जो अपने तल में, अपने केन्द्र के परित: ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा है। वलय का प्रत्येक द्रव्यमान घटक इसकी अक्ष से R दूरी पर है और $v = R\omega$ चाल से चलता है। इसलिए इसकी गतिज ऊर्जा है–

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

समीकरण (6.35) से तुलना करने पर हम पाते हैं कि वलय के लिए $I = MR^2$



चित्र 6.28 *द्रव्यमान के एक जोड़े से युक्त, l लंबाई की छड़, जो निकाय के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली इसकी लंबाई के लम्बवत् अक्ष के परित: घूम रही है। निकाय का कुल द्रव्यमान M है।*

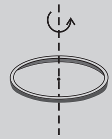
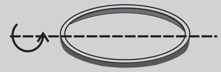
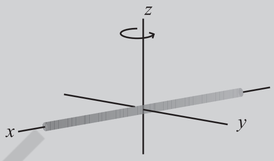
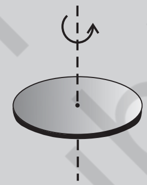
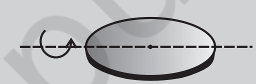
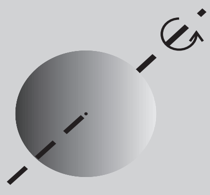
b) अब, हम l लंबाई की दृढ़, नगण्य द्रव्यमान की छड़ के सिरों पर लगे दो द्रव्यमानों से बने एक निकाय पर विचार करेंगे। यह निकाय इसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती छड़ के लम्बवत् अक्ष के परित: घूम रहा है (चित्र 6.28)। प्रत्येक द्रव्यमान $M/2$ अक्ष से $l/2$ दूरी पर है। इसलिए, इन द्रव्यमानों का जड़त्व आघूर्ण होगा,
$(M/2)(l/2)^2 + (M/2)(l/2)^2$

अत:, द्रव्यमानों के इस जोड़े का, द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती छड़ के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण
$I = Ml^2 / 4$

सारणी 6.1 में कुछ सुपरिचित नियमित आकार के पिंडों के विशिष्ट अक्षों के परित: जड़त्व आघूर्ण केवल दिए गए हैं। (इन सूत्रों के व्युत्पन्न इस पाठ्यपुस्तक के क्षेत्र से बाहर हैं। आगे आप इनके विषय में उच्च कक्षाओं में पढ़ेंगे।)

क्योंकि, किसी पिण्ड का द्रव्यमान, उसकी रेखीय गत्यावस्था में परिवर्तन का प्रतिरोध करता है, वह उसकी रेखीय गति के जड़त्व का माप है। उसी प्रकार, दी गई अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण, घूर्णी गति में परिवर्तन का प्रतिरोध करता है, अत: इसको पिण्ड के घूर्णी जड़त्व का माप माना जा सकता है। इस माप से यह बोध होता है कि किसी पिण्ड में पिण्ड के विभिन्न कण घूर्णन अक्ष के आपेक्ष किस प्रकार अवस्थित हैं। द्रव्यमान की तरह जड़त्व आघूर्ण एक नियत राशि नहीं होती, बल्कि, इसका मान पिण्ड के सापेक्ष इसकी अक्ष की स्थिति और दिग्विन्यास के ऊपर निर्भर करता है। किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करते दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान किस प्रकार वितरित है इसके एक माप के रूप में हम एक नया प्राचल परिभाषित करते हैं, जिसे *परिभ्रमण त्रिज्या* कहते हैं। यह पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण और कुल द्रव्यमान से संबंधित है।

सारणी 6.1 विशिष्ट अक्षों के परितः कुछ नियमित आकार के पिण्डों के जड़त्त्व आघूर्ण

Z	पिण्ड	अक्ष	आरेख	*I*
1.	R त्रिज्या का पतला, वृत्ताकार वलय	वलय तल के लम्बवत् केन्द्र से गुजरती		MR^2
2.	R त्रिज्या का पतला, वृत्ताकार वलय	व्यास		$MR^2/2$
3.	L लंबाई की पतली छड़	मध्य बिन्दु से गुजरती लंबाई के लम्बवत्		$ML^2/12$
4.	R त्रिज्या की वृत्ताकार चकती	केन्द्र से गुजरती तल के लम्बवत्		$MR^2/2$
5.	R त्रिज्या की वृत्ताकार चकती	व्यास		$MR^2/4$
6.	R त्रिज्या का खोखला बेलन	बेलन की अक्ष		MR^2
7.	R त्रिज्या का ठोस बेलन	बेलन की अक्ष		$MR^2/2$
8.	R त्रिज्या का ठोस गोला	व्यास		$2MR^2/5$

सारणी 6.1 से हम देख सकते हैं कि सभी पिण्डों के लिए, $I = Mk^2$, जहाँ k की विमा वही है जो लंबाई की। मध्य बिन्दु से गुजरती छड़ के लम्बवत् अक्ष के लिए $k^2 = L^2/12$, अर्थात् $k = L/\sqrt{12}$ । इसी प्रकार वृत्ताकार चकती के उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण के लिए $k = R/2$। k पिण्ड और घूर्णन अक्ष का एक ज्यामितीय गुण है। इसे *परिभ्रमण त्रिज्या* कहा जाता है। *किसी अक्ष के परितः किसी पिण्ड की परिभ्रमण त्रिज्या* अक्ष से एक ऐसे कण की दूरी है जिसका द्रव्यमान सम्पूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान के बराबर है। फलतः जिसका जड़त्व आघूर्ण, दी गई अक्ष के परितः पिण्ड के वास्तविक जड़त्व आघूर्ण के बराबर है।

अतः, किसी दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, उसके द्रव्यमान, उसके आकार एवं आकृति, घूर्णन-अक्ष के परितः इसके द्रव्यमान के वितरण और इस अक्ष की स्थिति एवं दिग्विन्यास पर निर्भर करता है। समीकरण (6.34), में दी गई परिभाषा के आधार पर हम तुरन्त इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि जड़त्व आघूर्ण का विमीय सूत्र ML^2 एवं इसके SI मात्रक $kg\,m^2$ हैं।

किसी पिण्ड के घूर्णन के जड़त्व के माप के रूप में इस अत्यंत महत्वपूर्ण राशि I के बहुत से व्यावहारिक उपयोग हैं। वाष्प इंजन और ऑटोमोबाइल इंजन जैसी मशीनें जो घूर्णी गति पैदा करती हैं, इनमें बहुत अधिक जड़त्व आघूर्ण वाली एक चकती लगी रहती है जिसे *गतिपालक चक्र* कहते हैं। अपने विशाल जड़त्व आघूर्ण के कारण यह चक्र वाहन की गति में अचानक परिवर्तन नहीं होने देता। इससे गति धीरे-धीरे परिवर्तित होती है, गाड़ी झटके खा-खाकर नहीं चलती और वाहन पर सवार यात्रियों के लिए सवारी आरामदेह हो जाती है।

6.10 अचल अक्ष के परितः शुद्ध घूर्णी गतिकी

हमने पहले भी स्थानांतरण गति और घूर्णी गति के बीच समतुल्यता के संकेत दिए हैं। उदारहण के लिए यह कि कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ का घूर्णी गति में वही भूमिका है जो रेखीय वेग $\mathbf{v}$ का स्थानांतरण गति में। हम इस समतुल्यता को आगे बढ़ाना चाहते हैं। ऐसा करते समय हम अपना विवेचन अचर (स्थिर) अक्ष के परितः घूर्णन तक ही सीमित रखेंगे। ऐसी गति के लिए केवल एक स्वातंत्र्य-कोटि की आवश्यकता होगी अर्थात् इसका वर्णन करने के लिए केवल एक स्वतंत्र चर कोणीय विस्थापन चाहिए। यह रेखीय गति में स्थानांतरण के संगत है। यह अनुभाग केवल शुद्ध गतिकी से संबंधित है। गति विज्ञान की ओर हम अगले अनुभाग में मुखातिब होंगे।

याद करें, कि किसी घूर्णन करते हुए पिण्ड का कोणीय विस्थापन बताने के लिए हमने इस पिण्ड पर कोई कण P ले लिया था (चित्र 6.29)। जिस तल में यह कण गति करता है उसमें इसका कोणीय विस्थापन θ ही सम्पूर्ण पिण्ड का कोणीय विस्थापन है; θ एक नियत दिशा से मापा जाता है, जिसको यहाँ हम x'- अक्ष ले लेते हैं जो बिन्दु P के गति के तल में स्थित x-अक्ष के समानांतर रेखा है। ध्यान दें कि z– अक्ष घूर्णन-अक्ष है और कण P की गति का तल x - y तल के समानांतर है। चित्र 6.29 में θ_0, भी दर्शाया गया है जो $t = 0$ पर कोणीय विस्थापन है।

हम यह भी याद करें कि कोणीय वेग, समय के साथ कोणीय विस्थापन में होने वाले परिवर्तन की दर है। यानि, $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt$। ध्यान दें, कि चूंकि घूर्णन अक्ष अचल है, कोणीय वेग के साथ सदिश की तरह व्यवहार करने की आवश्यकता नहीं है। कोणीय त्वरण, $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ है।

शुद्ध घूर्णी गतिकी में प्रयुक्त होने वाली राशियाँ, कोणीय विस्थापन (θ), कोणीय वेग (ω) एवं कोणीय त्वरण (α) क्रमशः स्थानांतरीय शुद्ध गतिकी की राशियों रेखीय विस्थापन ($\mathbf{x}$), रेखीय वेग ($\mathbf{v}$) एवं रेखीय त्वरण ($\mathbf{a}$) के समतुल्य हैं। सम (यानि अचर) त्वरण के तहत स्थानांतरीय शुद्ध गतिकी के समीकरण हम जानते हैं। वे हैं :

$$v = v_0 + at \qquad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \qquad \text{(c)}$$

जहाँ x_0 = प्रारंभिक विस्थापन एवं v_0= प्रारंभिक वेग है। शब्द 'प्रारंभिक' का अर्थ है $t = 0$ पर राशि का मान।

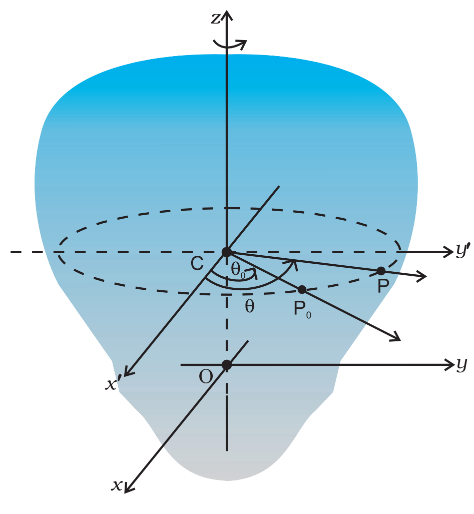
इनके संगत, अचर त्वरण से घूर्णी गति करती हुई वस्तु के लिए शुद्ध घूर्णी गतिकी के समीकरण होंगे :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (6.36)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (6.37)$$

$$\text{और } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (6.38)$$

जहाँ θ_0= घूर्णन करते पिण्ड का प्रारंभिक कोणीय विस्थापन है एवं ω_0 = इस पिण्ड का प्रारंभिक कोणीय वेग है।



चित्र 6.29 किसी दृढ़ पिण्ड की कोणीय स्थिति बताना

उदाहरण 6.10: मूल सिद्धांत के आधार पर समीकरण (6.38) व्युत्पन्न कीजिए।

हल : कोणीय त्वरण समान है, अत:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{अचर} \qquad \text{(i)}$$

इस समीकरण का समाकलन करने पर

$$\omega = \int \alpha \, dt + c$$

$$= \alpha t + c \quad (\because \ \alpha \ \text{अचर है})$$

$t = 0, \ \omega = \omega_0$ (दिया है)

समीकरण (i) से, $t = 0$ पर

$\omega = c = \omega_0$

अत: $\omega = \alpha t + \omega_0$, जो वांछित समीकरण है।

परिभाषा $\omega = d\theta/dt$ का इस्तेमाल करके हम समीकरण (6.36) का समाकलन कर समीकरण (6.37) प्राप्त कर सकते हैं। यह व्युत्पत्ति एवं समीकरण (6.38) की व्युत्पत्ति हम आपके अभ्यास के लिए छोड़ते हैं।

उदाहरण 6.11: ऑटोमोबाइल इंजन का कोणीय वेग 16 सेकेंड में 1200 rpm से बढ़कर 3120 rpm हो जाता है। (i) यह मानते हुए कि कोणीय त्वरण समान रहता है, इसका मान ज्ञात कीजिए। (ii) इस समय में इंजन कितने चक्कर लगाता है?

हल :

(i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$, जहाँ ω_0 = rad/s में व्यक्त इसका प्रारंभिक कोणीय वेग है

ω_0 = $2\pi \times$ rev/s में प्रारंभिक कोणीय वेग

$$= \frac{2\pi \times \text{rev } s^{-1} \text{ में कोणीय वेग}}{60 \text{ सेकेंड/मिनट}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60} \text{ rad/s}$$

$= 40\pi$ rad/s

इसी प्रकार, ω = rad/s में अंतिम कोणीय वेग

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$= 2\pi \quad 52$ rad/s

$= 104\,\pi$ rad/s

$$\therefore \ \text{कोणीय त्वरण}, \ \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 4\pi \text{ rad/s}^2$$

इंजन का कोणीय त्वरण 4π rad/s² है।

(ii) t समय में कोणीय विस्थापन,

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$= 1152\pi$ rad

$$\text{चक्करों की संख्या} = \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$$

6.11 अचल अक्ष के परित: घूर्णी गतिकी

सारणी 6.2 में रेखीय गति से संबंधी राशियों और उनके संगत घूर्णी गति की समतुल्य राशियों की सूची दी गई है। पिछले अनुभाग में हमने इन दोनों प्रकार की गतियों की शुद्ध गतिकी से तुलना की है। हमें यह भी पता है कि घूर्णी गति में जड़त्व आघूर्ण एवं बल आघूर्ण, रेखीय गति के क्रमश: द्रव्यमान एवं बलों का प्रतिनिधित्व करते हैं। यह सब जानने के बाद सारणी में दिए गए अन्य समतुल्यों के विषय में अनुमान लगा लेना अधिक कठिन नहीं है। उदाहरण के लिए, रेखीय गति में कार्य = F dx। अत: एक अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति में कार्य $\tau d\theta$ होना चाहिए क्योंकि हम पहले से ही यह जानते हैं कि dx के संगत राशि है dθ एवं F के संगत राशि τ है। तथापि यह आवश्यक है कि राशियों की यह संगतता, गति विज्ञान के मजबूत आधार पर प्रतिष्ठापित की जाए। आगे हम यही करने जा रहे हैं।

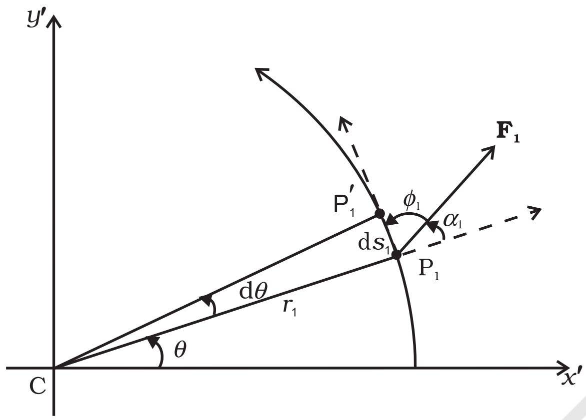
इससे पहले कि हम अपनी बात शुरू करें, *एक अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति में एक सरलीकरण की ओर ध्यान दिलाना आवश्यक है।* क्योंकि अक्ष स्थिर है, हमें अपने विवेचन में बल आघूर्णों एवं कोणीय संवेगों के इसके अनुदिश अवयवों पर ही विचार करने की आवश्यकता होगी। केवल यही घटक पिण्ड को घूर्णन कराते हैं। बल आघूर्ण का अक्ष से अभिलंबवत घटक अक्ष को उसकी स्थिति से घुमाने का प्रयास करता है। हालांकि हम मानकर चलेंगे कि बल आघूर्ण के इस घटक को संतुलित करने हेतु आवश्यक बल आघूर्ण उत्पन्न होंगे जो अक्ष की स्थिति बनाए रखने के लिए उत्तरदायी होंगे। अत: इन अभिलंबवत् बल आघूर्ण के घटकों पर विचार में करने की आवश्यकता नहीं है। पर्याय में हमें निम्न विचार में लाने की आवश्यकता है:

(1) पिण्ड पर कार्य करने वाले वे बल जो घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल में हैं।

(2) पिण्ड के कणों की स्थिति–सदिशों के केवल वे अवयव जो घूर्णन अक्ष के लम्बवत् हैं।

या यूँ कहें कि बलों और स्थिति सदिशों के अक्ष के अनुदिश लिए गए अवयवों को हमें गणना में लाने की आवश्यकता नहीं है।

बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य



चित्र 6.30 एक अचल अक्ष के परितः घूमते पिण्ड के किसी कण पर लगे बल $\mathbf{F}_1$ द्वारा किया गया कार्य। कण, अक्ष पर स्थित केन्द्र C वाले वृत्त पर चलता है। चाप $P_1P'_1(\mathrm{d}s_1)$ कण का विस्थापन बताता है।

चित्र 6.30 में एक अचल अक्ष के परितः घूर्णन करता एक दृढ़ पिण्ड दर्शाया गया है। घूर्णन अक्ष, z-अक्ष है, जो पृष्ठ के अभिलम्बवत् है। जैसा ऊपर बताया गया है हमें केवल उन्हीं बलों पर विचार करने की आवश्यकता है जो अक्ष के अभिलंबवत् तल में अवस्थित है। पिण्ड के किसी कण पर, जिसकी स्थिति P_1, से दर्शाई गई है, एक बल $\mathbf{F}_1$ लगता है जिसकी क्रिया रेखा, अक्ष के अभिलम्बवत् तल में है। सुविधा के लिए हम इसको x'–y' तल कहते हैं (यह हमारे पृष्ठ का तल ही है)। P_1 पर स्थित कण r_1 त्रिज्या के वृत्त पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर है; $CP_1 = r_1$।

Δt समय में, कण, P'_1 पर पहुँच जाता है। इसलिए कण के विस्थापन $\mathrm{d}\mathbf{s}_1$ का परिमाण $\mathrm{d}s_1 = r_1\mathrm{d}\theta$ है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इसकी दिशा वृत्त के स्पर्श रेखा के अनुदिश हैं। कण पर बल द्वारा किया गया कार्य –

$$\mathrm{d}W_1 = \mathbf{F}_1 . \mathrm{d}\mathbf{s}_1 = F_1 \mathrm{d}s_1 \cos\phi_1 = F_1(r_1\,\mathrm{d}\theta)\sin\alpha_1$$

जहाँ ϕ_1 , $\mathbf{F}_1$ और P_1 पर खींची गई स्पर्श रेखा के बीच बना कोण है, और α_1, $\mathbf{F}_1$ एवं त्रिज्या $\mathbf{OP}_1$ के मध्य कोण हैं। $\phi_1 + \alpha_1 = 90°$।

मूल बिन्दु के परितः $\mathbf{F}_1$ के कारण बल आघूर्ण $\mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1$ है। $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}_1$ [चित्र 6.17(b) देखें] चूंकि $\mathbf{OC}$ अक्ष के अनुदिश है इसके कारण बल आघूर्ण पर विचार करने की आवश्यकता नहीं है। $\mathbf{F}_1$ के कारण प्रभाव बल आघूर्ण है : $\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{CP}_1 \times \mathbf{F}_1$; यह घूर्णी अक्ष के अनुदिश है तथा इसका परिमाण $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\alpha$ है। अतः

$$\mathrm{d}W_1 = \tau_1 \mathrm{d}\theta$$

यदि पिण्ड पर एक से अधिक बल कार्य कर रहे हों, तो उन सबके द्वारा किए गए कार्यों को जोड़ने से पिण्ड पर किया गया कुल कार्य प्राप्त होगा। विभिन्न बलों के कारण लगे बल आघूर्णों के परिमाणों को τ_1, τ_2,... इत्यादि से दर्शाएँ तो

$$\mathrm{d}W = (\tau_1 + \tau_2 + ...)\mathrm{d}\theta$$

सारणी 6.2 स्थानांतरीय एवं घूर्णी गति की तुलना

	रेखीय गति	अचल अक्ष के परितः घूर्णी गति
1	विस्थापन x	कोणीय विस्थापन θ
2	वेग $v = dx/dt$	कोणीय वेग $\omega = d\theta/dt$
3	त्वरण $a = dv/dt$	कोणीय त्वरण, $\alpha = d\omega/dt$
4	द्रव्यमान M	जड़त्त्व आघूर्ण I
5	बल $F = Ma$	बल आघूर्ण $\tau = I\alpha$
6	कार्य $dW = F\,ds$	कार्य $W = \tau\, d\theta$
7	गतिज ऊर्जा $K = Mv^2/2$	गतिज ऊर्जा $K = I\omega^2/2$
8	शक्ति $P = F\,v$	शक्ति $P = \tau\omega$
9	रेखीय संवेग $p = Mv$	कोणीय संवेग $L = I\,\omega$

याद रहे, कि बल आघूर्णों को जन्म देने वाले बल तो अलग–अलग कणों पर लग रहे हैं, मगर कोणीय विस्थापन $d\theta$ सभी कणों के लिए समान है। अब जैसा कि इस अनुभाग के प्रारंभ में कहा गया था, हमारे लिए सभी बल आघूर्ण z-अक्ष के अनुदिश प्रभावी हैं। अत: कुल बल आघूर्ण का परिमाण τ, प्रत्येक बल आघूर्णों के परिमाणों τ_1, τ_2 ..... के बीजगणितीय योग के बराबर है। अर्थात् $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \ldots\ldots$, अत: हम कह सकते हैं

$$dW = \tau d\theta \tag{6.39}$$

यह समीकरण एक अचल अक्ष के परित: घूमते पिण्ड पर लगे कुल बाह्य बल आघूर्ण τ के द्वारा किया गया कार्य बताता है। रेखीय गति के संगत समीकरण

$$dW = F ds$$

से इसकी तुल्यता स्पष्ट ही है। समीकरण (6.39) के दोनों पक्षों को dt से विभाजित करने पर

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

या $P = \tau\omega$ (6.40)

यह तात्क्षणिक शक्ति के लिए समीकरण है। अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति में शक्ति के इस समीकरण की तुलना रेखीय गति में शक्ति की समीकरण $P = Fv$ से कर सकते हैं।

एक पूर्णत: दृढ़ पिण्ड में विभिन्न कणों की कोई आंतरिक गति नहीं होती। अत:, बाह्य बल आघूर्णों द्वारा किया गया कार्य विसरित नहीं होता। परिणामस्वरूप पिण्ड की गतिज ऊर्जा बढ़ती चली जाती है। पिण्ड पर किए गए कार्य की दर, समीकरण (6.40) द्वारा प्राप्त होती है। इसी दर से पिण्ड की गतिज ऊर्जा बढ़ती है। गतिज ऊर्जा की वृद्धि की दर

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

हम मानते हैं कि समय के साथ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण नहीं बदलता। यानि कि पिण्ड का द्रव्यमान स्थिर रहता है तथा पिण्ड दृढ़ बना रहता है और इसके सापेक्ष घूर्णन अक्ष की स्थिति नहीं बदलती।

तब, चूंकि $\alpha = d\omega/dt$, अत:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\alpha$$

कार्य करने की दर को गतिज ऊर्जा में वृद्धि की दर के बराबर रखने पर

$$\tau\omega = I\omega\alpha$$

$$\tau = I\alpha \tag{6.41}$$

समीकरण (6.41) सरल रेखीय गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम $F = ma$ से मिलती जुलती है।

ठीक वैसे ही जैसे बल पिण्ड में रेखीय त्वरण उत्पन्न करता है, बल आघूर्ण इसमें कोणीय त्वरण पैदा करता है। कोणीय त्वरण, आरोपित बल आघूर्ण के समानुपाती और पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण के व्युत्क्रमानुपाती होता है। इस संदर्भ में समीकरण (6.41) को, एक अचल अक्ष के परित: घूर्णन के लिए लागू होने वाला न्यूटन का द्वितीय नियम, कह सकते हैं।

उदाहरण 6.12: नगण्य द्रव्यमान वाली एक रस्सी, 20 kg द्रव्यमान एवं 20 cm त्रिज्या के गतिपालक पहिये के रिम पर लपेटी हुई है। रस्सी पर 25 N का एकसमान कर्षण बल लगाया जाता है जैसा कि चित्र 6.31 में दर्शाया गया है। गतिपालक पहिया एक क्षैतिज धुरी पर लगाया गया है जिसके बियरिंगों में कोई घर्षण नहीं है।

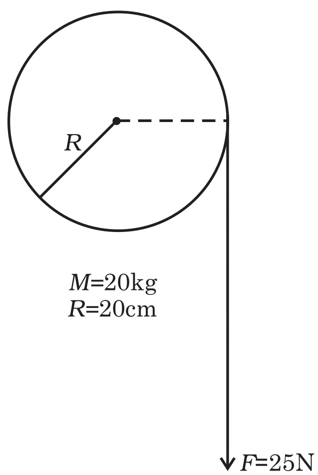
(a) पहिये के कोणीय त्वरण की गणना कीजिए।

(b) 2 m रस्सी खुलने तक कर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

(c) इस क्षण पर पहिये की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। यह मानिए कि पहिया शून्य से गति प्रारंभ करता है।

(d) भाग (b) एवं (c) के उत्तरों की तुलना कीजिए।

हल



चित्र 6.31

(a) इसके लिए $I\alpha = \tau$

बल आघूर्ण $\tau = FR$

$= 25 \times 0.20$ Nm ($R = 0.20$m)

$= 5.0$ Nm

और I = अपनी अक्ष के परित: पहिये का जड़त्व आघूर्ण $= \frac{MR^2}{2}$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

कोणीय त्वरण $\alpha = 5.0 \text{ N m}/0.4 \text{ kg m}^2 = 12.5 \text{ s}^{-2}$

(b) 2 m रस्सी खोलने में किया गया कार्य

$= 25 \text{ N} \times 2 \text{ m} = 50 \text{ J}$

(c) माना कि ω अंतिम कोणीय वेग है। तब पहिये की गतिज ऊर्जा में हुई वृद्धि = $\frac{1}{2} I\omega^2$

चूंकि पहिया विरामावस्था से गति प्रारंभ करता है

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$$

तथा कोणीय विस्थापन θ = खोली गई रस्सी की लंबाई/पहिये की त्रिज्या

$= 2 \text{ m}/0.2 \text{ m} = 10 \text{ rad}$

$$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250 (\text{rad}/\text{s})^2$$

$\therefore$ गतिज ऊर्जा में वृद्धि $= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50 \text{ J}$

(d) दोनों उत्तर समान हैं, अर्थात् पहिये द्वारा प्राप्त गतिज ऊर्जा = बल द्वारा किया गया कार्य। यहाँ घर्षण के कारण ऊर्जा का बिलकुल क्षय नहीं हुआ है। ◀

6.12 अचल अक्ष के परित: घूर्णी गति का कोणीय संवेग

अनुभाग 6.7 में, हमने कणों के निकाय के कोणीय संवेग के विषय में पढ़ा था। उससे हम यह जानते हैं, कि किसी बिन्दु के परित:, कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग में समय के साथ होने वाले परिवर्तन की दर, उस निकाय पर उसी बिन्दु के परित: लिए गए कुल बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होती है। जब कुल बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो, तो निकाय का कुल कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

अब हम कोणीय संवेग का अध्ययन, एक अचल अक्ष के परित: घूर्णन के विशिष्ट मामलों में करना चाहते हैं। n-कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग की व्यापक समीकरण है,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad (6.25b)$$

अब हम पहले, एक अचल अक्ष के परित: किसी दृढ़ पिण्ड के कोणीय संवेग पर विचार करेंगे। प्राप्त समीकरण को सरलतम पदों में लाकर फिर पिण्ड के सभी कणों के लिए इसका जोड़ निकालेंगे तथा पूरे पिण्ड के लिए $\mathbf{L}$ प्राप्त करेंगे।

एकाकी कण के लिए, $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

चित्र (6.17b) देखिए। घूर्णन करती वस्तु के किसी विशिष्ट कण का स्थिति सदिश $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$ है। चित्र में $\mathbf{r} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ (क्योंकि $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$)

$$\boldsymbol{l} = (\mathbf{OC} \times m\mathbf{v}) + (\mathbf{OC} \times m\mathbf{v})$$

P पर कण के रेखीय वेग $\mathbf{v}$ का परिमाण $v = \omega r_\perp$ है जहाँ $r_\perp$ CP की लम्बाई या P की घूर्णी अक्ष के लम्बवत् दूरी है। $\mathbf{v}$ कण द्वारा बनाए गए वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा के अनुदिश है। दाहिने हाथ के नियम द्वारा ज्ञात कर सकते हैं कि $\mathbf{CP} \times \mathbf{v}$ अचल अक्ष के अनुदिश है। घूर्णन अक्ष (जो यहाँ z-अक्ष है) को इकाई सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश व्यक्त करने पर

$$\mathbf{CP} \times m\mathbf{v} = r_\perp (mv) \hat{\mathbf{k}}$$

$$= mr_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}} \qquad (v = \omega r_\perp)$$

इसी प्रकार हम जाँच सकते हैं कि $\mathbf{OC} \times \mathbf{v}$ अचर अक्ष के लम्बवत् हैं। अचर अक्ष (यानि z-अक्ष) के अनुदिश $\boldsymbol{l}$ के घटक से $\boldsymbol{l}_z$ से दर्शाने पर

$$\boldsymbol{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = mr_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}}$$

तथा $\quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_z + \mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}$

ध्यान दें कि $\boldsymbol{l}_z$ अचर अक्ष के समांतर है परन्तु $\boldsymbol{l}$ नहीं। सामान्यतया किसी कण का कोणीय संवेग घूर्णी अक्ष के अनुदिश नहीं होता है अर्थात् आवश्यक नहीं कि $\boldsymbol{l}$ तथा $\boldsymbol{\omega}$ एक-दूसरे के समांतर हों। रेखीय गति में इससे संगत तथ्य से इसकी तुलना करें। रेखीय गति में किसी कण के $\mathbf{p}$ तथा $\mathbf{v}$ सदैव एक दूसरे के समांतर होते हैं।

पूरे पिण्ड का कोणीय संवेग ज्ञात करने के लिए, हम इसके सभी कणों के लिए $\boldsymbol{l}_i$ के मानों को जोड़ेंगे यानि i का मान 1 से n तक रखते हुए

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum \boldsymbol{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

z-अक्ष के अनुदिश तथा लम्बवत् $\mathbf{L}$ के घटकों को हम $\mathbf{L}_z$ तथा $\mathbf{L}_\perp$ से दर्शाते हैं।

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i \qquad (6.42a)$$

जहाँ m_i तथा $\mathbf{v}_i$ i वें कण के द्रव्यमान तथा वेग हैं तथा C_i कण द्वारा बनाए गए वृत्त का केन्द्र है।

$$\mathbf{L}_z \sum \boldsymbol{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega \hat{\mathbf{k}}$$

या $\quad \mathbf{L}_z = I\omega \hat{\mathbf{k}} \qquad (6.42b)$

समीकरण (6.42b) स्वाभाविक रूप से अनुसरित है, क्योंकि *i*वें कण की अक्ष से लंबवत् दूरी r_i है, एवं घूर्णन अक्ष के परितः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण $I = \sum m_i r_i^2$ है।

ध्यान दें $\quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ (6.42c)

दृढ़ पिण्ड, जिन पर हमने इस अध्याय में मुख्यतः विचार किया है, घूर्णन अक्ष के परितः सममित हैं अर्थात्, घूर्णन अक्ष उनकी सममिति अक्षों में से एक है। इस प्रकार के पिण्डों के लिए, दिए गए $\mathbf{OC}_i$ के संगत प्रत्येक $\mathbf{v}_i$ वेग युक्त कण के लिए C_i केन्द्र वाले वृत्त के, व्यास के दूसरे सिरे पर, $-\mathbf{v}_i$ वेग वाला दूसरा कण होता है। इस प्रकार के कण–युगलों का $\mathbf{L}_\perp$ में कुल योगदान शून्य होगा। परिणामस्वरूप सममित पिण्डों के लिए $\mathbf{L}_\perp$ शून्य होता है। अतः

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}} \tag{6.42d}$$

उन पिण्डों के लिए जो घूर्णन अक्ष के परितः सममित नहीं है, $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_z$। इसलिए $\mathbf{L}$ घूर्णन अक्ष के अनुदिश नहीं होता।

सारणी 6.1 में क्या आप बता सकते हैं कि किन मामलों में $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z$ लागू नहीं होता?

आइये, समीकरण (6.42a) को समय के आधार पर अवकलित करें क्योंकि $\hat{\mathbf{k}}$ एक अचर सदिश है :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,w)\right)\hat{\mathbf{k}}$$

समीकरण (6.26b) के अनुसार

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$$

जैसा कि आपने पिछले भाग में देखा है एक अचर अक्ष के परितः घूर्णी पिण्ड के लिए बाह्य बल आघूर्णी के केवल उन्हीं घटकों पर विचार करने की आवश्यकता है जो घूर्णी अक्ष के अनुदिश हैं। अतः $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$। चूँकि $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ तथा $\mathbf{L}_z$ की दिशा (सदिश $\hat{\mathbf{k}}$) अचर है, एक अचर अक्ष के परितः घूर्णी पिण्ड के लिए

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_z}{\mathrm{d}t} = \tau\hat{\mathbf{k}} \tag{6.43a}$$

तथा $$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_\perp}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.43b}$$

अतः अचल अक्ष के परितः घूर्णी पिण्ड का अचल अक्ष के लम्बवत् कोणीय संवेग का घटक अचर है। चूँकि $\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$, समीकरण (6.43a) से

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = \tau \tag{6.43c}$$

यदि जड़त्व आघूर्ण I समय के साथ परिवर्तित नहीं होता है तो

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

और समीकरण (6.43c) से

$$\tau = I\alpha \tag{6.41}$$

कार्य–गतिज ऊर्जा संबंध से यह समीकरण हम पहले ही व्युत्पन्न कर चुके हैं।

6.12.1 कोणीय संवेग का संरक्षण

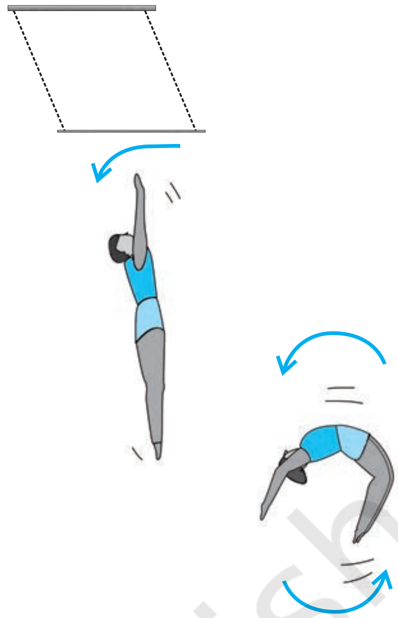
अब हम इस स्थिति में हैं कि कोणीय संवेग के संरक्षण के सिद्धांत का पुनरावलोकन कर सकें। हम अपने विवेचन को एक अचल अक्ष के परितः घूर्णन तक सीमित रखेंगे। समीकरण (6.43c) से, यदि बाह्य बल आघूर्ण शून्य है तो

$$L_z = I\omega = \text{अचरांक} \tag{6.44}$$

सममित पिण्डों के लिए, समीकरण (6.42d) से, L_z के स्थान पर L लेते हैं। (L तथा L_z क्रमशः $\mathbf{L}$ तथा $\mathbf{L}_z$ के परिमाण हैं)।

यह अचल अक्ष घूर्णन के लिए समीकरण (6.29a) का अन्य रूप है जो कोणीय संवेग के संरक्षण का व्यापक नियम व्यक्त करता है। समीकरण (6.44) हमारे दैनिक जीवन की बहुत सी स्थितियों पर उपयोगी है। अपने मित्र के साथ मिल कर आप यह प्रयोग कर सकते हैं। एक घुमाव कुर्सी पर बैठिए अपनी भुजाएँ मोड़े रखिए और पैरों को जमीन से ऊपर उठाकर रखिए। अपने मित्र से कहिए कि वह कुर्सी को तेजी से घुमाए। जबकि कुर्सी पर्याप्त कोणीय चाल से घूम रही हो अपनी भुजाओं को क्षैतिज दिशा में फैलाइये। क्या परिणाम होता है? आपकी कोणीय चाल घट जाती है। यदि आप अपनी भुजाओं को फिर शरीर के पास ले आयें तो कोणीय चाल फिर से बढ़ जाती है। यह एक ऐसी स्थिति है जिसमें कोणीय संवेग का संरक्षण स्पष्ट है। यदि घूर्णन यंत्र व्यवस्था में घर्षण नगण्य हो, तो कुर्सी की घूर्णन अक्ष के परितः कोई बाह्य बल आघूर्ण प्रभावी नहीं रहेगा अतः $I\omega$ का मान नियत है। भुजाओं को फैलाने से घूर्णन अक्ष के परितः I बढ़ जायेगा, परिणामस्वरूप कोणीय वेग ω कम हो जायेगा। भुजाओं को शरीर के पास लाने से विपरीत परिस्थिति प्राप्त होगी।

चित्र 6.32 (a) *कोणीय संवेग के संरक्षण का प्रदर्शन। घुमाऊ कुर्सी पर बैठी लड़की अपनी भुजाओं को शरीर के पास लाती है/ दूर ले जाती है।*



चित्र 6.32 (b) *कलाबाज अपने कला प्रदर्शन में कोणीय संवेग के नियम का लाभ लेते हुए।*

एक सरकस का कलाबाज और एक गोताखोर इस सिद्धांत का बखूबी लाभ उठाते हैं। इसके अलावा स्केटर्स और भारतीय या पश्चिमी शास्त्रीय नृतक जब एक पैर के पंजे पर घूर्णन करते हैं तो वे उस सिद्धांत संबंधी अपने असाधारण प्रावीण्य का प्रदर्शन करते है।

सारांश

1. एक आदर्श दृढ़ पिंड एक ऐसा पिंड है जिसके कणों पर बल लगाने पर भी उनके बीच की दूरी नहीं बदलती।
2. एक ऐसा दृढ़ पिंड जो किसी बिन्दु पर, या किसी रेखा के अनुदिश स्थिर हो केवल घूर्णी गति ही कर सकता है। जो पिंड किसी प्रकार भी स्थिर न हो वह या तो स्थानान्तरण गति करेगा या घूर्णी और स्थानान्तरण दोनों प्रकार की संयोजित गति।
3. एक नियत अक्ष के परित: घूर्णन में, दृढ़ पिण्ड का प्रत्येक कण अक्ष के लम्बवत् तल में एक वृत्ताकार पथ पर चलता है जिसका केन्द्र अक्ष पर स्थित होता है। अर्थात् घूर्णन करते दृढ़ पिंड की अक्ष के लम्बवत् प्रत्येक रेखा का कोणीय वेग किसी क्षण विशेष पर समान रहता है।
4. शुद्ध स्थानान्तरण में, पिंड का प्रत्येक कण किसी क्षण पर समान वेग से चलता है।
5. कोणीय वेग एक सदिश है। इसका परिमाण $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ है और इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है। नियत अक्ष के परित: घूर्णन के लिए, सदिश $\boldsymbol{\omega}$ की दिशा भी नियत होती है।
6. दो सदिशों $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ का सदिश (या क्रॉस) गुणन एक सदिश है जिसको हम $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ लिखते हैं। इस सदिश का परिमाण $ab \sin \theta$ है और इसकी दिशा का ज्ञान दक्षिणवर्त पेंच के नियम या दाएं हाथ के नियम द्वारा होता है।
7. नियत अक्ष के परित: घूर्णन करते दृढ़ पिंड के किसी कण का रेखीय वेग $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, जहाँ $\mathbf{r}$ अक्ष पर लिए गये किसी मूल बिन्दु से कण की स्थिति बताने वाला सदिश है। यह संबंध, दृढ़ पिंड की एक नियत बिन्दु के परित: होने वाली अधिक व्यापक गति के लिए लागू होता है। उस स्थिति में $\mathbf{r}$, स्थिर बिन्दु को मूल बिन्दु लेकर कण की स्थिति दर्शाने वाला सदिश है।
8. कणों के एक निकाय का द्रव्यमान केन्द्र एक ऐसा बिन्दु है जिसकी स्थिति सदिश हम निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

9. कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के वेग को हम $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ द्वारा लिख सकते हैं। यहाँ $\mathbf{P}$ निकाय का रेखीय संवेग है। द्रव्यमान केन्द्र इस प्रकार गति करता है मानो निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान इस बिन्दु पर संकेंद्रित हो और सभी बाह्य बल भी इसी बिन्दु पर प्रभावी हों। यदि निकाय पर कुल बाह्य बल शून्य है तो इसका कुल रेखीय संवेग अचर रहता है।

10. n कणों के निकाय का मूल बिन्दु के परितः कोणीय संवेग,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

n कणों के निकाय का मूल बिन्दु के परितः ऐंठन या बल आघूर्ण,

$$\tau = \sum_{1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

i वें कण पर लगने वाले बल $\mathbf{F}_i$ में, बाह्य एवं आंतरिक सभी बल शामिल हैं। न्यूटन के तृतीय नियम को मानते हुए कि किन्ही दो कणों के बीच बल, उनकी स्थितियों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश लगते हैं, हम दर्शा सकते हैं $\boldsymbol{\tau}_{\text{int}} = 0$ एवं,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$

11. एक दृढ़ पिण्ड के यांत्रिक संतुलन में होने के लिए,

(i) यह स्थानान्तरीय संतुलन में हो, अर्थात, इस पर लगने वाला कुल बाह्य बल शून्य हो, $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ एवं,

(ii) यह घूर्णी संतुलन में हो, अर्थात्, इस पर लगने वाला कुल बाह्य बल आघूर्ण शून्य हो,: $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$;

12. किसी विस्तारित आकार के पिंड का गुरुत्व केन्द्र वह बिन्दु है जिसके परितः पिंड का कुल गुरुत्वीय बल आघूर्ण शून्य होता है।

13. किसी अक्ष के परितः एक दृढ़ पिंड का जड़त्व आघूर्ण $I = \sum m_i r_i^2$ सूत्र द्वारा परिभाषित किया जाता है। जहाँ r_i पिण्ड के i-वें कण की अक्ष से लम्बवत् दूरी है। घूर्णन की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ है

राशि	संकेत	विमा	मात्रक	टिप्पणी
कोणीय वेग	$\boldsymbol{\omega}$	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}	$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
कोणीय संवेग	$\mathbf{L}$	$[ML^2T^{-1}]$	J s	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
बल आघूर्ण	$\boldsymbol{\tau}$	$[ML^2T^{-2}]$	N m	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
जड़त्व आघूर्ण	I	$[ML^2]$	kg m^2	$I = \sum m_i r_{i\perp}^2$

विचारणीय विषय

1. किसी निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति ज्ञात करने के लिए निकाय के आन्तरिक बलों का ज्ञान आवश्यक नहीं है। इसके लिए हमें केवल पिण्ड पर लगने वाले बाह्य बलों का ज्ञान होना चाहिए।
2. कणों के किसी निकाय की गति को, इसके द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरीय गति और द्रव्यमान केन्द्र के परितः इसकी घूर्णी गति में अलग-अलग करके विचार करना कणों के निकाय के गति विज्ञान की एक उपयोगी तकनीक है। इस तकनीक का एक उदाहरण, कणों के निकाय की गतिज ऊर्जा K को, द्रव्यमान के परितः निकाय के घूर्णन की गतिज ऊर्जा K' एवं द्रव्यमान केन्द्र की गतिज ऊर्जा $MV^2/2$ में पृथक करना है।
$$K = K' + MV^2/2$$
3. परिमित आकार के पिंडों (अथवा कणों के निकायों) के लिए लागू होने वाला न्यूटन का द्वितीय नियम कणों के लिए लागू होने वाले न्यूटन के द्वितीय एवं तृतीय नियमों के ऊपर आधारित है।
4. यह स्थापित करने के लिए कि कणों के निकाय के कुल कोणीय संवेग परिवर्तन की दर, निकाय पर आरोपित कुल बल आघूर्ण है, हमें न केवल कणों के लिए लागू होने वाले न्यूटन के द्वितीय नियम की आवश्यकता होगी वरन् तृतीय नियम भी इस शर्त के साथ लागू करना होगा कि किन्ही दो कणों के बीच बल उनको मिलाने वाली रेखा के अनुदिश ही कार्य करते हैं।
5. कुल बाह्य बल का शून्य होना और कुल बाह्य बल आघूर्ण का शून्य होना दो स्वतंत्र शर्तें हैं। यह हो सकता है कि एक शर्त पूरी होती हो पर दूसरी पूरी न होती हो। बलयुग्म में कुल बाह्य बल शून्य है पर बल आघूर्ण शून्य नहीं है।
6. यदि कुल बाह्य बल शून्य हो तो निकाय पर लगने वाला कुल बल आघूर्ण मूल बिन्दु के ऊपर निर्भर नहीं करता।
7. किसी पिंड का गुरुत्व केन्द्र उसके द्रव्यमान केन्द्र से तभी संपाती होता है जब गुरुत्व क्षेत्र पिंड के विभिन्न भागों पर समान होता है।
8. यदि दृढ़ पिंड एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा हो तब भी यह आवश्यक नहीं है कि इसका कोणीय संवेग $\mathbf{L}$, कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ के समान्तर हो। तथापि, इस अध्याय में वर्णित स्थिति में, जहाँ पिंड एक नियत अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है और वह अक्ष पिंड की सममित अक्ष भी है, संबंध $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ लागू होता है जहाँ I घूर्णी अक्ष के परितः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण है।

अभ्यास

6.1 एकसमान द्रव्यमान घनत्व के निम्नलिखित पिण्डों में प्रत्येक के द्रव्यमान केंद्र की अवस्थिति लिखिए:
(a) गोला, (b) सिलिंडर, (c) छल्ला तथा (d) घन ।
क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केंद्र आवश्यक रूप से उस पिण्ड के भीतर स्थित होता है ?

6.2 HCl अणु में दो परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथकन लगभग 1.27 Å (1 Å = 10^{-10} m) है । इस अणु के द्रव्यमान केंद्र की लगभग अवस्थिति ज्ञात कीजिए । यह ज्ञात है कि क्लोरीन का परमाणु हाइड्रोजन के परमाणु की तुलना में 35.5 गुना भारी होता है तथा किसी परमाणु का समस्त द्रव्यमान उसके नाभिक पर केंद्रित होता है ।

6.3 कोई बच्चा किसी चिकने क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल v से गतिमान किसी लंबी ट्राली के एक सिरे पर बैठा है । यदि बच्चा खड़ा होकर ट्राली पर किसी भी प्रकार से दौड़ने लगता है, तब निकाय (ट्राली + बच्चा) के द्रव्यमान केंद्र की चाल क्या है ?

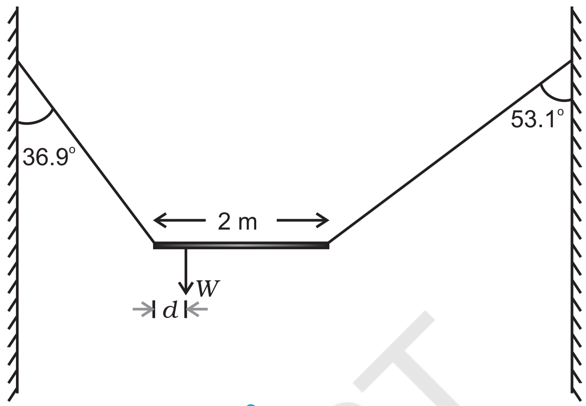
6.4 दर्शाइये कि $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ के बीच बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ के परिमाण का आधा है।

6.5 दर्शाइये कि $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ का परिमाण तीन सदिशों $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{c}$ से बने समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

6.6 एक कण, जिसके स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ के x, y, z अक्षों के अनुदिश अवयव क्रमशः x, y, z हैं, और रेखीय संवेग सदिश $\mathbf{P}$ के अवयव p_x, p_y, p_z हैं, के कोणीय संवेग $\mathbf{l}$ के अक्षों के अनुदिश अवयव ज्ञात कीजिए। दर्शाइये, कि यदि कण केवल x-y तल में ही गतिमान हो तो कोणीय संवेग का केवल z-अवयव ही होता है।

6.7 दो कण जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m एवं चाल v है d दूरी पर, समान्तर रेखाओं के अनुदिश, विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं। दर्शाइये कि इस द्विकण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है, चाहे हम जिस बिन्दु के परित: कोणीय संवेग लें।

6.8 W भार की एक असमांग छड़ को, उपेक्षणीय भार वाली दो डोरियों से चित्र 6.33 में दर्शाये अनुसार लटका कर विरामावस्था में रखा गया है। डोरियों द्वारा ऊर्ध्वाधर से बने कोण क्रमश: 36.9° एवं 53.1° हैं। छड़ 2 m लम्बाई की है। छड़ के बाएँ सिरे से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी d ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.33

6.9 एक कार का भार 1800 kg है। इसकी अगली और पिछली धुरियों के बीच की दूरी 1.8 m है। इसका गुरुत्व केन्द्र, अगली धुरी से 1.05 m पीछे है। समतल धरती द्वारा इसके प्रत्येक अगले और पिछले पहियों पर लगने वाले बल की गणना कीजिए।

6.10 समान द्रव्यमान और त्रिज्या के एक खोखले बेलन और एक ठोस गोले पर समान परिमाण के बल आघूर्ण लगाये गये हैं। बेलन अपनी सामान्य सममित अक्ष के परित: घूम सकता है और गोला अपने केन्द्र से गुजरने वाली किसी अक्ष के परित:। एक दिये गये समय के बाद दोनों में कौन अधिक कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा?

6.11 20 kg द्रव्यमान का कोई ठोस सिलिंडर अपने अक्ष के परित: 100 rad s^{-1} की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है । सिलिंडर की त्रिज्या 0.25 m है । सिलिंडर के घूर्णन से संबद्ध गतिज ऊर्जा क्या है ? सिलिंडर का अपने अक्ष के परित: कोणीय संवेग का परिमाण क्या है ?

6.12 (a) कोई बच्चा किसी घूर्णिका (घूर्णीमंच) पर अपनी दोनों भुजाओं को बाहर की ओर फैलाकर खड़ा है । घूर्णिका को 40 rev/min की कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है । यदि बच्चा अपने हाथों को वापस सिकोड़ कर अपना जड़त्व आघूर्ण अपने आरंभिक जड़त्व आघूर्ण का 2/5 गुना कर लेता है, तो इस स्थिति में उसकी कोणीय चाल क्या होगी ? यह मानिए कि घूर्णिका की घूर्णन गति घर्षणरहित है ।

(b) यह दर्शाइए कि बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरंभिक घूर्णन की गतिज ऊर्जा से अधिक है। आप गतिज ऊर्जा में हुई इस वृद्धि की व्याख्या किस प्रकार करेंगे ?

6.13 3 kg द्रव्यमान तथा 40 cm त्रिज्या के किसी खोखले सिलिंडर पर कोई नगण्य द्रव्यमान की रस्सी लपेटी गई है । यदि रस्सी को 30 N बल से खींचा जाए तो सिलिंडर का कोणीय त्वरण क्या होगा ? रस्सी का रैखिक त्वरण क्या है? यह मानिए कि इस प्रकरण में कोई फिसलन नहीं है ।

6.14 किसी घूर्णक (रोटर) की 200 rad s^{-1} की एकसमान कोणीय चाल बनाए रखने के लिए एक इंजन द्वारा 180 N m का बल आघूर्ण प्रेषित करना आवश्यक होता है । इंजन के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए । (नोट : घर्षण की अनुपस्थिति में एकसमान कोणीय वेग होने में यह समाविष्ट है कि बल आघूर्ण शून्य है । व्यवहार में लगाए गए बल आघूर्ण की आवश्यकता घर्षणी बल आघूर्ण को निरस्त करने के लिए होती है ।) यह मानिए कि इंजन की दक्षता 100% है।

6.15 R त्रिज्या वाली समांग डिस्क से $R/2$ त्रिज्या का एक वृत्ताकार भाग काट कर निकाल दिया गया है। इस प्रकार बने वृत्ताकार सुराख का केन्द्र मूल डिस्क के केन्द्र से $R/2$ दूरी पर है। अवशिष्ट डिस्क के गुरुत्व केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

6.16 एक मीटर छड़ के केन्द्र के नीचे क्षुर-धार रखने पर वह इस पर संतुलित हो जाती है जब दो सिक्के, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 5 g है, 12.0 cm के चिन्ह पर एक के ऊपर एक रखे जाते हैं तो छड़ 45.0 cm चिन्ह पर संतुलित हो जाती है। मीटर छड़ का द्रव्यमान क्या है?

6.17 एक ठोस गोला, भिन्न नति के दो आनत तलों पर एक ही ऊँचाई से लुढ़कने दिया जाता है। (a) क्या वह दोनों बार समान चाल से तली में पहुँचेगा? (b) क्या उसको एक तल पर लुढ़कने में दूसरे से अधिक समय लगेगा? (c) यदि हाँ, तो किस पर और क्यों?

6.18 2 m त्रिज्या के एक वलय (छल्ले) का भार 100 kg है। यह एक क्षैतिज फर्श पर इस प्रकार लोटनिक गति करता है कि इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 20 cm/s हो। इसको रोकने के लिए कितना कार्य करना होगा?

6.19 ऑक्सीजन अणु का द्रव्यमान 5.30×10^{-26} kg है तथा इसके केन्द्र से होकर गुजरने वाली और इसके दोनों परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण 1.94×10^{-46} kg m^2 है। मान लीजिए कि गैस के ऐसे अणु की औसत चाल 500 m/s है और इसके घूर्णन की गतिज ऊर्जा, स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा की दो तिहाई है। अणु का औसत कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

6.20 एक बेलन $30°$ कोण बनाते आनत तल पर लुढ़कता हुआ ऊपर चढ़ता है। आनत तल की तली में बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल 5 m/s है।

(a) आनत तल पर बेलन कितना ऊपर जायेगा?

(b) वापस तली तक लौट आने में इसे कितना समय लगेगा?

11088CH08

अध्याय 7

गुरुत्वाकर्षण

7.1 भूमिका

हम अपने आरंभिक जीवन में ही, सभी पदार्थों के पृथ्वी की ओर आकर्षित होने की प्रकृति को जान लेते हैं। जो भी वस्तु ऊपर फेंकी जाती है वह पृथ्वी की ओर गिरती है, पहाड़ से नीचे उतरने की तुलना में पहाड़ पर ऊपर जाने में कहीं अधिक थकान होती है, ऊपर बादलों से वर्षा की बूँदें पृथ्वी की ओर गिरती हैं, तथा अन्य ऐसी ही बहुत सी परिघटनाएँ हैं। इतिहास के अनुसार इटली के भौतिक विज्ञानी गैलीलियो (1564-1642) ने इस तथ्य को मान्यता प्रदान की कि सभी पिण्ड, चाहे उनके द्रव्यमान कुछ भी हों, एकसमान त्वरण से पृथ्वी की ओर त्वरित होते हैं। ऐसा कहा जाता है कि उन्होंने इस तथ्य का सार्वजनिक निदर्शन किया था। यह कहना, चाहे सत्य भी न हो, परंतु यह निश्चित है कि उन्होंने आनत समतल पर लोटनी पिण्डों के साथ कुछ प्रयोग करके गुरुत्वीय त्वरण का एक मान प्राप्त किया था, जो बाद में किए गए प्रयोगों द्वारा प्राप्त अधिक यथार्थ मानों के काफी निकट था।

आद्य काल से ही बहुत से देशों में तारों, ग्रहों तथा उनकी गतियों के प्रेक्षण जैसी असंबद्ध प्रतीत होने वाली परिघटनाएँ ध्यानाकर्षण का विषय रही हैं। आद्य काल के प्रेक्षणों द्वारा आकाश में दिखाई देने वाले तारों की पहचान की गई, जिनकी स्थिति में सालोंसाल कोई परिवर्तन नहीं होता है। प्राचीन काल से देखे जाने वाले पिण्डों में कुछ अधिक रोचक पिण्ड भी देखे गए, जिन्हें ग्रह कहते हैं, और जो तारों की पृष्ठभूमि में नियमित गति करते प्रतीत होते हैं। ग्रहीय गतियों के सबसे प्राचीन प्रमाणित मॉडल को अब से लगभग 2000 वर्ष पूर्व टॉलमी ने प्रस्तावित किया था। यह 'भूकेन्द्री' मॉडल था, जिसके अनुसार सभी आकाशीय पिण्ड तारे, सूर्य तथा ग्रह पृथ्वी की परिक्रमा करते हैं। इस मॉडल की धारणा के अनुसार आकाशीय पिण्डों की संभावित गति केवल वृत्तीय गति ही हो सकती थी। ग्रहों की प्रेक्षित गतियों का वर्णन करने के लिए टॉलमी ने गतियों के जिस विन्यास को प्रतिपादित किया वह बहुत जटिल था। इसके अनुसार ग्रहों को वृत्तों में परिक्रमा करने वाला तथा इन वृत्तों के केन्द्रों को स्वयं एक बड़े वृत्त में गतिशील बताया गया था। लगभग 400 वर्ष के पश्चात भारतीय खगोलज्ञों ने भी इसी प्रकार के सिद्धांत प्रतिपादित किए। तथापि, आर्यभट्ट (5 वीं शताब्दी में) ने पहले से ही अपने शोध प्रबन्ध में एक अधिक परिष्कृत मॉडल का वर्णन किया था, जिसे **सूर्य केन्द्री मॉडल** कहते हैं जिसके अनुसार सूर्य को सभी

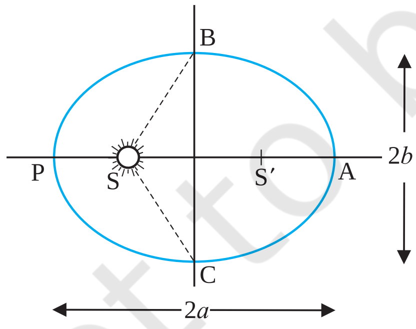
ग्रहों की गतियों का केन्द्र माना गया है। एक हजार वर्ष के पश्चात पोलैण्ड के एक ईसाई भिक्षु, जिनका नाम निकोलस कोपरनिकस (1473–1543) था, ने एक पूर्ण विकसित मॉडल प्रस्तावित किया जिसके अनुसार सभी ग्रह, केन्द्रीय स्थान पर स्थित स्थिर सूर्य, के परित: वृत्तों में परिक्रमा करते हैं। गिरजाघर ने इस सिद्धांत पर संदेह प्रकट किया। परन्तु इस सिद्धांत के लब्ध प्रतिष्ठित समर्थकों में एक गैलीलियो थे, जिनपर शासन के द्वारा, आस्था के विरुद्ध होने के कारण, मुकदमा चलाया गया।

लगभग गैलीलियो के ही काल में डेनमार्क के एक कुलीन पुरुष टायको ब्रेह (1546–1601) ने अपना समस्त जीवन काल अपनी नंगी आंखों से सीधे ही ग्रहों के प्रेक्षणों का अभिलेखन करने में लगा दिया। उनके द्वारा संकलित आँकड़ों का बाद में उसके सहायक जोहान्नेस केप्लर (1571–1640) द्वारा विश्लेषण किया गया। उन्होंने इन आँकड़ों को सार के रूप में तीन परिष्कृत नियमों द्वारा प्रतिपादित किया, जिन्हें अब **केप्लर के नियमों** के नाम से जाना जाता है। ये नियम न्यूटन को ज्ञात थे। इन उत्कृष्ट नियमों ने न्यूटन को अपना गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम प्रस्तावित करके असाधारण वैज्ञानिकों की पंक्ति में शामिल होने योग्य बनाया।

7.2 केप्लर के नियम

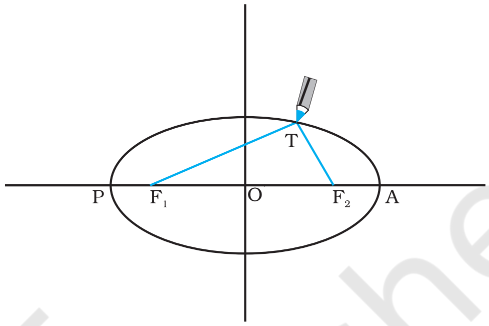
केप्लर के तीन नियमों का उल्लेख इस प्रकार किया जा सकता है:

1. कक्षाओं का नियम : *सभी ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गति करते हैं तथा सूर्य इसकी, एक नाभि पर स्थित होता है* (चित्र 7.1a)।



चित्र 7.1(a) *सूर्य के परित: किसी ग्रह द्वारा अनुरेखित दीर्घवृत्त। सूर्य का निकटतम बिन्दु P तथा दूरस्थ बिन्दु A है। P को उपसौर तथा A को अपसौर कहते हैं। अर्ध दीर्घ अक्ष दूरी AP का आधा है।*

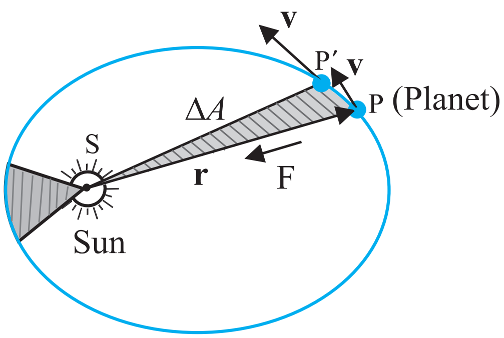
यह नियम कोपरनिकस के मॉडल से हटकर था जिसके अनुसार ग्रह केवल वृत्तीय कक्षाओं में ही गति कर सकते हैं। दीर्घवृत्त, जिसका वृत्त एक विशिष्ट प्रकरण होता है, एक बन्द वक्र होता है, जिसे बहुत सरलता से इस प्रकार खींचा जा सकता है :



चित्र 7.1(b) *एक दीर्घवृत खींचना। एक डोरी के दो सिरे F_1 तथा F_2 स्थिर हैं। पेंसिल की नोंक डोरी को तनी रखते हुए इन सिरों के परित: चलायी जाती है।*

दो बिन्दुओं F_1 तथा F_2 का चयन कीजिए। एक डोरी लेकर इसके सिरों को F_1 तथा F_2 पर पिनों द्वारा जड़िए। पेंसिल की नोंक से डोरी को तानिए और फिर डोरी को तनी हुई रखते हुए पेंसिल को चलाते हुए बन्द वक्र खींचिए (चित्र 7.1 (b)) इस प्रकार प्राप्त बन्द वक्र को दीर्घवृत्त कहते हैं। स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त के किसी भी बिन्दु T पर F_1 तथा F_2 से दूरियों का योग अपरिवर्तित (नियत) है। बिन्दु F_1 तथा F_2 दीर्घवृत्त की नाभि कहलाती है। बिन्दु F_1 तथा F_2 को मिलाइए और इस रेखा को आगे बढ़ाइए जिससे यह दीर्घवृत्त को चित्र 7.1 (b) में दर्शाए अनुसार बिन्दुओं P तथा A पर प्रतिच्छेद करती है। रेखा PA का मध्यबिन्दु दीर्घवृत्त का केन्द्र है तथा लम्बाई PO = AO दीर्घवृत्त का अर्ध दीर्घ अक्ष कहलाती है। किसी वृत्त के लिए दोनों नाभियाँ एक दूसरे में विलीन होकर एक हो जाती हैं तथा अर्ध दीर्घ अक्ष वृत्त की त्रिज्या बन जाती है।

2. क्षेत्रफलों का नियम : *सूर्य से किसी ग्रह को मिलाने वाली रेखा समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प करती है* (चित्र 7.2)। यह नियम इस प्रेक्षण से प्रकट होता है कि ग्रह उस समय धीमी गति करते प्रतीत होते हैं जब वे सूर्य से अधिक दूरी पर होते हैं। सूर्य के निकट होने पर ग्रहों की गति अपेक्षाकृत तीव्र होती है।



चित्र 7.2 *ग्रह P सूर्य के परितः दीर्घवृत्तीय कक्षा में गति करता है। किसी छोटे समय अंतराल Δt में ग्रह द्वारा प्रसर्पित क्षेत्रफल ΔA को छायांकित क्षेत्र द्वारा दर्शाया गया है।*

3. आवर्त कालों का नियम

किसी ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग उस ग्रह द्वारा अनुरेखित दीर्घवृत्त के अर्ध-दीर्घ अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।

नीचे दी गयी सारणी (7.1) में सूर्य के परितः आठ ग्रहों के सन्निकट परिक्रमण-काल उनके अर्ध-दीर्घ अक्षों के मानों सहित दर्शाए गए हैं

सारणी 7.1

नीचे दिए गए ग्रहीय गतियों की माप के आँकड़े केप्लर के आवर्तकालों के नियम की पुष्टि करते हैं।

a ≡ अर्ध-दीर्घ अक्ष 10^{10} m के मात्रकों में

T ≡ ग्रह का परिक्रमण-काल वर्षों (y) में

Q ≡ भागफल (T^2 / a^3) 10^{-34} y^2 m^{-3} मात्रकों में

ग्रह	a	T	Q
बुध	5.79	0.24	2.95
शुक्र	10.8	0.615	3.00
पृथ्वी	15.0	1	2.96
मंगल	22.8	1.88	2.98
बृहस्पति	77.8	11.9	3.01
शनि	143	29.5	2.98
यूरेनस	287	84	2.98
नेप्ट्यून	450	165	2.99
प्लूटो*	590	248	2.99

क्षेत्रफलों के नियम को कोणीय संवेग संरक्षण का निष्कर्ष माना जा सकता है जो सभी केन्द्रीय बलों के लिए मान्य है। किसी ग्रह पर लगने वाला केन्द्रीय बल, केन्द्रीय सूर्य तथा ग्रह को मिलाने वाले सदिश के अनुदिश कार्य करता है। मान लीजिए सूर्य मूल बिन्दु पर है और यह भी मानिए कि ग्रह की स्थिति तथा संवेग को क्रमशः $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{p}$ से दर्शाया जाता है, तब m द्रव्यमान के ग्रह द्वारा Δt समय में प्रसर्पित क्षेत्रफल $\Delta \mathbf{A}$ (चित्र 7.2) इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\Delta \mathbf{A} = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}\Delta t) \qquad (7.1)$$

अतः

$$\Delta \mathbf{A} / \Delta t = \tfrac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m, \text{ (चूँकि } \mathbf{v} = \mathbf{p}/m)$$
$$= \mathbf{L} / (2\, m) \qquad (7.2)$$

यहाँ $\mathbf{v}$ वेग है तथा $\mathbf{L}$ कोणीय संवेग है जो $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ के तुल्य है। किसी केन्द्रीय बल के लिए, जो $\mathbf{r}$ के अनुदिश निर्देशित है, $\mathbf{L}$ एक नियतांक होता है, जबकि ग्रह परिक्रमा कर रहा होता है। अतः अंतिम समीकरण के अनुसार $\Delta \mathbf{A} / \Delta t$ एक नियतांक है। यही क्षेत्रफलों का नियम है। गुरुत्वाकर्षण का बल भी केन्द्रीय बल ही है और इसलिए क्षेत्रफलों का नियम न्यूटन के नियमों के इसी लक्षण का पालन/अनुगमन करता है।

उदाहरण 7.1 मान लीजिए किसी ग्रह की उपसौर P पर (चित्र 7.1a) चाल v_P है, तथा सूर्य व ग्रह की दूरी SP = r_P है। $\{r_P, v_P\}$ तथा अपसौर पर इन राशियों के तदनुरूपी मान $\{r_A, v_A\}$ में संबंध स्थापित कीजिए। क्या ग्रह BAC तथा CPB पथ तय करने में समान समय लेगा?

हल कोणीय संवेग का परिमाण P पर है $L_p = m_p r_p v_p$, क्योंकि निरीक्षण द्वारा यह ज्ञात होता है कि $\mathbf{r}_p$ तथा $\mathbf{v}_p$ परस्पर लम्बवत हैं। इसी प्रकार, $L_A = m_p r_A v_A$. तब कोणीय संवेग संरक्षण से

$$m_p r_p v_p = m_p r_A v_A$$

अथवा $$\frac{v_p}{v_A} = \frac{r_A}{r_p}$$

चूँकि $r_A > r_p$, $v_p > v_A$.

दीर्घवृत्त तथा त्रिज्या सदिशों SB एवं SC द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल $SBPC$ की तुलना में अधिक है (चित्र 7.1a)। केप्लर के दूसरे नियम के अनुसार, समान समय अंतरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प होते हैं। अतः ग्रह पथ CPB को तय करने की अपेक्षा पथ BAC को तय करने में अधिक समय लेगा। ◀

7.3 गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम

एक दंत कथा में लिखा है पेड़ से गिरते हुए सेब का प्रेक्षण करते हुए न्यूटन को गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम तक पहुँचने की प्रेरणा मिली जिससे केप्लर के नियमों तथा पार्थिव गुरुत्वाकर्षण के स्पष्टीकरण का मार्ग प्रशस्त हुआ। न्यूटन ने अपने विवेक के आधार पर यह स्पष्ट अनुभव किया कि R_m त्रिज्या की कक्षा में परिक्रमा करने वाले चन्द्रमा पर पृथ्वी के गुरुत्व के कारण एक अभिकेन्द्र त्वरण आरोपित होता है जिसका परिमाण

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \tag{7.3}$$

यहाँ V चन्द्रमा की चाल है जो आवर्तकाल T से इस प्रकार संबंधित है, $V = 2\pi R_m / T$। आवर्त काल T का मान लगभग 27.3 दिन है तथा उस समय तक R_m का मान लगभग 3.84 10^8m ज्ञात हो चुका था। यदि हम इन संख्याओं को समीकरण (7.3) में प्रतिस्थापित करें, तो हमें a_m का जो मान प्राप्त होता है, वह पृथ्वी के गुरुत्व बल के कारण उत्पन्न पृथ्वी के पृष्ठ पर गुरुत्वीय त्वरण g के मान से काफी कम होता है। यह स्पष्ट रूप से इस तथ्य को दर्शाता है कि पृथ्वी के गुरुत्व बल का मान दूरी के साथ घट जाता है। यदि हम यह मान लें कि पृथ्वी के कारण गुरुत्वाकर्षण का मान पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है, तो हमें $a_m \propto R_m^{-2}$ और $g \propto R_E^{-2}$ प्राप्त होगा (यहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या है), जिससे हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} \simeq 3600 \tag{7.4}$$

जो $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$ तथा समीकरण (7.3) से a_m के मान के साथ मेल खाता है। इस प्रेक्षण ने न्यूटन को नीचे दिए गए गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम को प्रतिपादित करने में मार्गदर्शन दिया :

"इस विश्व में प्रत्येक पिण्ड हर दूसरे पिण्ड को एक बल द्वारा आकर्षित करता है जिसका परिमाण दोनों पिण्डों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।"

यह उद्धरण तत्वत: न्यूटन के प्रसिद्ध शोध प्रबन्ध "प्राकृतिक दर्शन के गणितीय सिद्धांत" (Mathematical Principles of Natural Philosophy) जिसे संक्षेप में प्रिंसिपिया (Principia) कहते हैं, से प्राप्त होता है।

गणितीय रूप में न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम को इस प्रकार कहा जा सकता है : किसी बिंदु द्रव्यमान m_2 पर किसी अन्य बिंदु द्रव्यमान m_1 के कारण बल $\mathbf{F}$ का परिमाण

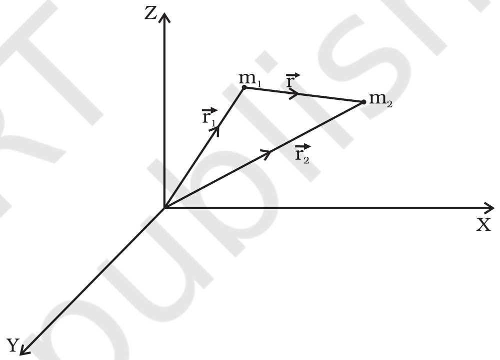
$$|\mathbf{F}| = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \tag{7.5}$$

सदिश रूप में समीकरण (7.5) को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\mathbf{F} = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}\left(-\hat{\mathbf{r}}\right) = -G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$= -G \times \frac{m_1 \times m_2}{|\mathbf{r}|^3}\,\mathbf{r}$$

यहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियतांक, $\hat{\mathbf{r}}$ m_1 से m_2 तक एकांक सदिश तथा $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ है जैसा कि चित्र 7.3 में दर्शाया गया है।

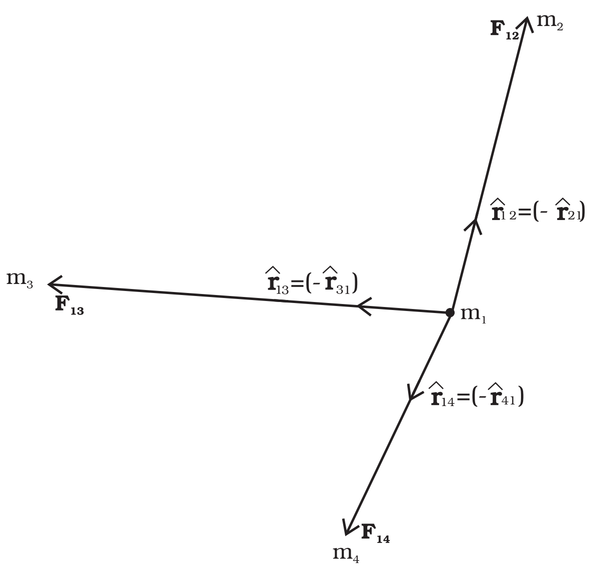


चित्र 7.3 m_2 के कारण m_1 पर गुरुत्वीय बल $\mathbf{r}$ के अनुदिश है, यहाँ $\mathbf{r}$, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ है।

गुरुत्वीय बल आकर्षी बल है, अर्थात् m_2 पर m_1 के कारण लगने वाला बल $\mathbf{F}$, $-\mathbf{r}$ के अनुदिश है। न्यूटन के गति के तीसरे नियम के अनुसार, वास्तव में बिन्दु द्रव्यमान m_1 पर m_2 के कारण बल $-\mathbf{F}$ है। इस प्रकार m_1 पर m_2 के कारण लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल $\mathbf{F}_{12}$ एवं m_2 पर m_1 के कारण लगने वाले बल $\mathbf{F}_{21}$ का परस्पर संबंध है,

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

समीकरण (7.5) का अनुप्रयोग, अपने पास उपलब्ध पिण्डों पर कर सकने से पूर्व हमें सावधान रहना होगा, क्योंकि यह नियम बिन्दु द्रव्यमानों से संबंधित है, जबकि हमें विस्तारित पिण्डों, जिनका परिमित आमाप होता है, पर विचार करना है। यदि हमारे पास बिन्दु द्रव्यमानों का कोई संचयन है, तो उनमें से किसी एक पर बल अन्य बिन्दु द्रव्यमानों के कारण गुरुत्वाकर्षण बलों के सदिश योग के बराबर होता है जैसा कि चित्र 7.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 7.4 *बिन्दु द्रव्यमान m_1 पर बिन्दु द्रव्यमानों m_2, m_3 और m_4 के द्वारा आरोपित कुल गुरुत्वाकर्षण बल इन द्रव्यमानों द्वारा m_1 पर लगाए गए व्यष्टिगत बलों के सदिश योग के बराबर है।*

m_1 पर कुल बल है

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_2\, m_1}{r_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3\, m_1}{r_{31}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4\, m_1}{r_{41}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{41}$$

उदाहरण 7.2 किसी समबाहु त्रिभुज ABC के प्रत्येक शीर्ष पर m kg के तीन समान द्रव्यमान रखे हैं।
(a) इस त्रिभुज के केन्द्रक G पर रखे $2m$ kg के द्रव्यमान पर कितना बल आरोपित हो रहा है?
(b) यदि शीर्ष A पर रखे द्रव्यमान को दो गुना कर दिया जाए, तो कितना बल आरोपित होगा?
AG = BG = CG = 1m लीजिए (देखिए चित्र 7.5)

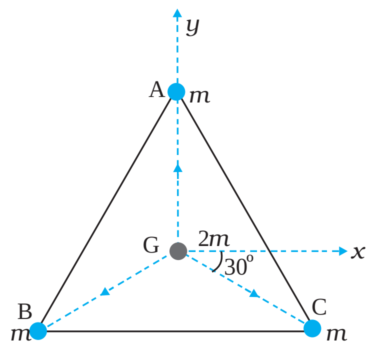
हल (a) धनात्मक x-अक्ष तथा GC के बीच का कोण 30° है और इतना ही कोण ऋणात्मक x-अक्ष तथा GB के बीच बनता है। सदिश संकेत पद्धति में व्यष्टिगत बल इस प्रकार हैं

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm\,(2m)}{1}\left(+\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right).$$

अध्यारोपण सिद्धांत तथा सदिश योग नियम के अनुसार (2m) पर परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल



चित्र 7.5 *तीन समान द्रव्यमान त्रिभुज ABC के तीन शीर्षों पर स्थित हैं। इसके केंद्रक G पर कोई द्रव्यमान $2m$ रखा गया है।*

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$$

$$\mathbf{F}_R = 2Gm^2\,\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$+\,2Gm^2\left(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right) = 0$$

विकल्प के रूप में, सममिति के आधार पर यह अपेक्षा की जा सकती है कि परिणामी बल शून्य होना चाहिए।

(b) यदि शीर्ष A पर द्रव्यमान 2m हो तो,

$$\mathbf{F}^1_{GA} = G.2m.2m\hat{\mathbf{j}} = 4Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}^1_{GB} = \mathbf{F}_{GB} \text{ and } \mathbf{F}^1_{GC} = F_{GC}$$

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}^1_{GA} + \mathbf{F}^1_{GB} + \mathbf{F}^1_{GC} = 2.Gm^2\hat{\mathbf{j}}$$ ◀

किसी विस्तारित पिण्ड (जैसे पृथ्वी) तथा बिन्दु द्रव्यमान के बीच गुरुत्वाकर्षण बल के लिए समीकरण (7.5) का सीधे ही अनुप्रयोग नहीं किया जा सकता। विस्तारित पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान दिए गए बिन्दु द्रव्यमान पर बल आरोपित करता है तथा इन सभी बलों की दिशा समान नहीं होती। हमें इन बलों का सदिश रीति द्वारा योग करना होता है ताकि विस्तारित पिण्ड के प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान के कारण आरोपित कुल बल प्राप्त हो जाए। ऐसा हम आसानी से कलन (कैलकुलस) के उपयोग द्वारा कर सकते हैं। जब हम ऐसा करते हैं तो हमे दो विशिष्ट प्रकरणों में सरल परिणाम प्राप्त होते हैं

(1) **किसी एकसमान घनत्व के खोखले गोलीय खोल तथा खोल के बाहर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान के बीच आकर्षण बल ठीक-ठाक उतना ही होता है जैसा कि खोल के समस्त द्रव्यमान को उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित मान कर ज्ञात किया जाता है।**

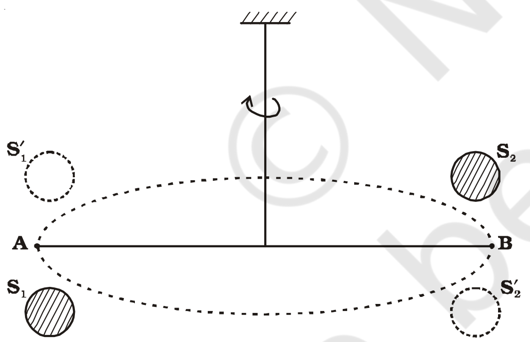
गुणात्मक रूप से इसे इस प्रकार समझा जा सकता है। खोल के विभिन्न क्षेत्रों के कारण गुरुत्वीय बलों के, खोल के केन्द्र को बिन्दु द्रव्यमान से मिलाने वाली रेखा के अनुदिश तथा इसके लंबवत्, दोनों दिशाओं में घटक होते हैं। खोल के सभी क्षेत्रों के बलों के घटकों का योग करते समय इस रेखा के लंबवत् दिशा के घटक निरस्त हो जाते हैं तथा केवल खोल के केन्द्र से बिन्दु द्रव्यमान को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश परिणामी बल बचा रहता है। इस परिणामी बल का परिमाण भी ऊपर वर्णन की गई विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(2) **एकसमान घनत्व के किसी खोखले गोले के कारण उसके भीतर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान पर आकर्षण बल शून्य होता है।**

गुणात्मक रूप में, हम फिर से इस परिणाम को समझ सकते हैं। गोलीय खोल के विभिन्न क्षेत्र खोल के भीतर स्थित बिन्दु द्रव्यमान को विभिन्न दिशाओं में आकर्षित करते हैं। ये बल परस्पर एक दूसरे को पूर्णतः निरस्त कर देते हैं।

7.4 गुरुत्वीय नियतांक

गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक नियम में प्रयुक्त गुरुत्वीय स्थिरांक G के मान को प्रायोगिक आधार पर ज्ञात किया जा सकता है तथा इस प्रकार के प्रयोग को सर्वप्रथम अंग्रेज वैज्ञानिक हेनरी कैवेन्डिश ने 1797 में किया था। उनके द्वारा उपयोग किए गए उपकरण को व्यवस्था चित्र 7.6 में दर्शाया गया है।



चित्र 7.6 कैवेन्डिश प्रयोग का योजनावत आरेखन। S_1 तथा S_2 दो विशाल गोले हैं (छायांकित दर्शाए गए हैं) जिन्हें A और B पर स्थिति द्रव्यमानों के दोनों ओर रखा जाता है। जब विशाल द्रव्यमानों (बिन्दुकित वृत्तों द्वारा दर्शाए) को दूसरी ओर ले जाते हैं, तो छड़ AB थोड़ा घूर्णन करती है, क्योंकि अब बल आघूर्ण की दिशा व्युत्क्रमित हो जाती है। घूर्णन कोण को प्रयोगों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

छड़ AB के दोनों सिरों पर दो छोटे सीसे के गोले जुड़े होते हैं। इस छड़ को एक पतले तार द्वारा किसी दृढ़ टेक से निलंबित किया जाता है। सीसे के दो विशाल गोलों को चित्र में दर्शाए अनुसार छोटे गोलों के निकट परन्तु विपरीत दिशाओं में लाया जाता है। बड़े गोले चित्र में दर्शाए अनुसार अपने निकट के छोटे गोलों को समान तथा विपरीत बलों से आकर्षित करते हैं। छड़ पर कोई नेट बल नहीं लगता, परन्तु केवल एक बल आघूर्ण कार्य करता है जो स्पष्ट रूप से छड़ की लम्बाई का F-गुना होता है, जबकि यहाँ F विशाल गोले तथा उसके निकट वाले छोटे गोले के बीच परस्पर आकर्षण बल है। इस बल आघूर्ण के कारण, निलंबन तार में तब तक ऐंठन आती है जब तक प्रत्यानयन बल आघूर्ण गुरुत्वीय बल आघूर्ण के बराबर नहीं होता। यदि निलंबन तार का व्यावर्तन कोण θ है, तो प्रत्यानयन बल आघूर्ण θ के अनुक्रमानुपाती तथा $\tau\theta$ के बराबर हुआ, यहाँ τ प्रत्यानयन बल युग्म प्रति एकांक व्यावर्तन कोण है। τ की माप अलग प्रयोग द्वारा की जा सकती है, जैसे कि ज्ञात बल आघूर्ण का अनुप्रयोग करके तथा व्यावर्तन कोण मापकर। गोल गेंदों के बीच गुरुत्वाकर्षण बल उतना ही होता है जितना कि गेंदों के द्रव्यमानों को उनके केन्द्रों पर संकेंन्द्रित मान कर ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार यदि विशाल गोले तथा उसके निकट के छोटे गोले के केन्द्रों के बीच की दूरी d है, M तथा m इन गोलों के द्रव्यमान हैं, तो बड़े गोले तथा उसके निकट के छोटे गोले के बीच गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \tag{7.6}$$

यदि छड़ AB की लम्बाई L है, तो F के कारण उत्पन्न बल आघूर्ण F तथा L का गुणनफल होगा। संतुलन के समय यह बल आघूर्ण प्रत्यानयन बल आघूर्ण के बराबर होता है। अतः

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\,\theta \tag{7.7}$$

इस प्रकार θ का प्रेक्षण करके इस समीकरण की सहायता से G का मान परिकलित किया जा सकता है।

कैवेन्डिश प्रयोग के बाद G के मापन में परिष्करण हुए तथा अब G का प्रचलित मान इस प्रकार है

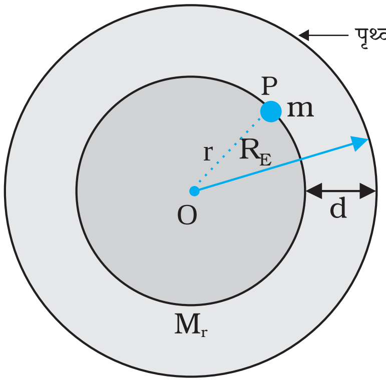
$$G = 6.67\text{x}10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \tag{7.8}$$

7.5 पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण

पृथ्वी को गोल होने के कारण बहुत से संकेन्द्री गोलीय खोलों का मिलकर बना माना जा सकता है जिनमें सबसे छोटा खोल केन्द्र पर तथा सबसे बड़ा खोल इसके पृष्ठ पर है। पृथ्वी के बाहर का कोई भी बिन्दु स्पष्ट रूप से इन सभी खोलों के बाहर हुआ। इस प्रकार सभी खोल पृथ्वी के बाहर किसी बिन्दु पर इस

प्रकार गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करेंगे जैसे कि इन सभी खोलों के द्रव्यमान पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के अनुसार उनके उभयनिष्ठ केन्द्र पर संकेन्द्रित हैं। सभी खोलों के संयोजन का कुल द्रव्यमान पृथ्वी का ही द्रव्यमान हुआ। अतः, पृथ्वी के बाहर किसी बिन्दु पर, गुरुत्वाकर्षण बल को यही मानकर ज्ञात किया जाता है कि पृथ्वी का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है।

पृथ्वी के भीतर स्थित बिन्दुओं के लिए स्थिति भिन्न होती है। इसे चित्र 7.7 में स्पष्ट किया गया है।



चित्र 7.7 M_E पृथ्वी का द्रव्यमान तथा R_E पृथ्वी की त्रिज्या है, पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे d गहराई पर स्थित किसी खान में कोई द्रव्यमान m रखा है। हम पृथ्वी को गोलतः सममित मानते हैं।

पहले की ही भांति अब फिर पृथ्वी को संकेन्द्री खोलों से मिलकर बनी मानिए और यह विचार कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर कोई द्रव्यमान m रखा गया है। बिन्दु P, r त्रिज्या के गोले के बाहर है। उन सभी खोलों के लिए जिनकी त्रिज्या r से अधिक है, बिन्दु P उनके भीतर है। अतः पिछले भाग में वर्णित परिणाम के अनुसार ये सभी खोल P पर रखे द्रव्यमानों पर कोई गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित नहीं करते। त्रिज्या $\leq r$ के खोल मिलकर r त्रिज्या का गोला निर्मित करते हैं तथा बिन्दु P इस गोले के पृष्ठ पर स्थित है। अतः r त्रिज्या का यह छोटा गोला P पर स्थित द्रव्यमान m पर इस प्रकार गुरुत्वाकर्षण बल आरोपित करता है जैसे इसका समस्त द्रव्यमान M_r इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। इस प्रकार P पर स्थित द्रव्यमान m पर आरोपित बल का परिमाण

$$F = \frac{Gm\,(M_r)}{r^2} \qquad (7.9)$$

हम यह मानते हैं कि समस्त पृथ्वी का घनत्व एकसमान है अतः इसका द्रव्यमान $M_E = \dfrac{4\pi}{3} R^3_E \rho$ है। यहाँ R_E पृथ्वी की त्रिज्या तथा ρ इसका घनत्व है। इसके विपरीत r त्रिज्या के गोले का द्रव्यमान $\dfrac{4\pi}{3}\rho r^3$ होता है। इसलिए

$$F = G\,m\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = G\,m\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{G\,m\,M_E}{R_E{}^3}\,r \qquad (7.10)$$

यदि द्रव्यमान m पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित है, तो $r = R_E$ तथा समीकरण (7.10) से इस पर गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\,\frac{M_E m}{R_E^2} \qquad (7.11)$$

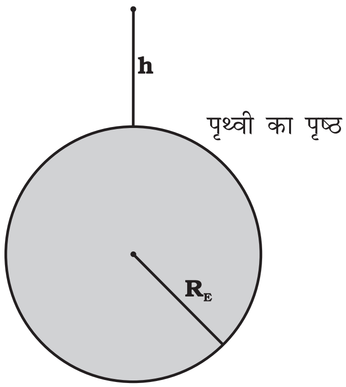
यहाँ M_E तथा R_E क्रमशः पृथ्वी का द्रव्यमान तथा त्रिज्या है। द्रव्यमान m द्वारा अनुभव किया जाने वाला त्वरण जिसे प्रायः प्रतीक g द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है, न्यूटन के द्वितीय नियम द्वारा बल F से संबंध $F = mg$ द्वारा संबंधित होता है। इस प्रकार

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad (7.12)$$

g सहज ही मापन योग्य है। R_E एक ज्ञात राशि है। कैवेन्डिश-प्रयोग द्वारा अथवा दूसरी विधि से प्राप्त G की माप g तथा R_E के ज्ञान को सम्मिलित करने पर M_E का आकलन समीकरण (7.12) की सहायता से किया जा सकता है। यही कारण है कि कैवेन्डिश के बारे में एक प्रचलित कथन यह है कि "कैवेन्डिश ने पृथ्वी को तोला"।

7.6 पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे तथा ऊपर गुरुत्वीय त्वरण

चित्र में दर्शाए अनुसार पृथ्वी के पृष्ठ से ऊँचाई h पर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान m पर विचार कीजिए (चित्र 7.8(a))।



(a)

चित्र 7.8(a) पृथ्वी के पृष्ठ से किसी ऊँचाई h पर g

पृथ्वी की त्रिज्या को R_E द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। चूंकि यह बिन्दु पृथ्वी से बाहर है, इसकी पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $(R_E + h)$ है। यदि बिन्दु द्रव्यमान m पर बल के परिमाण को $F(h)$ द्वारा निर्दिष्ट किया गया है, तो समीकरण (7.5) से हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \qquad (7.13)$$

बिन्दु द्रव्यमान द्वारा अनुभव किया जाने वाला त्वरण $F(h)/m \equiv g(h)$ तथा इस प्रकार हमें प्राप्त होता है

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (7.14)$$

स्पष्ट रूप से यह मान पृथ्वी के पृष्ठ पर g के मान से कम है : $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ जबकि $h << R_E$, हम समीकरण (7.14) के दक्षिण पक्ष को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$g(h) = \frac{GM}{R_E^2(1 + h/R_E)^2} = g\,(1 + h/R_E)^{-2}$$

$\frac{h}{R_E} << 1$ के लिए द्विपद व्यंजक का उपयोग करने पर

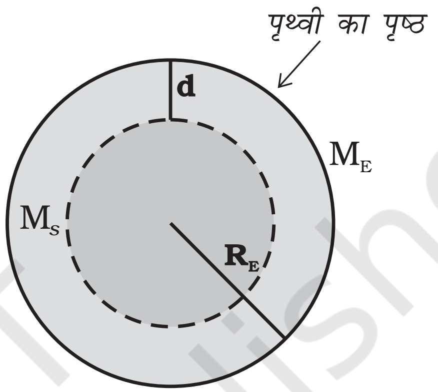
$$g(h) \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \qquad (7.15)$$

इस प्रकार समीकरण (7.15) से हमें प्राप्त होता है कि कम ऊँचाई h के लिए g का मान गुणक $(1 - 2h/R_E)$ द्वारा घटता है।

अब हम पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे गहराई d पर स्थित किसी बिन्दु द्रव्यमान m के विषय में विचार करते हैं। ऐसा होने पर चित्र 7.8(b) में दर्शाए अनुसार इस द्रव्यमान की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी $(R_E - d)$ त्रिज्या के छोटे गोले तथा d मोटाई के एक गोलीय खोल से मिलकर बनी मान सकते हैं। तब द्रव्यमान m पर d मोटाई की बाह्य खोल के कारण आरोपित बल पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के कारण शून्य होगा। जहाँ तक $(R_E - d)$ त्रिज्या के छोटे गोले के कारण आरोपित बल का संबंध है तो पिछले अनुभाग में वर्णित परिणाम के अनुसार, इस छोटे गोले के कारण बल इस प्रकार लगेगा जैसे कि छोटे गोले का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है। यदि छोटे गोले का द्रव्यमान M_s है, तो

$$M_s / M_E = (R_E - d)^3 / R_E^3 \qquad (7.16)$$

क्योंकि, किसी गोले का द्रव्यमान उसकी त्रिज्या के घन के अनुक्रमानुपाती होता है।



चित्र 7.8 (b) *किसी गहराई d पर g इस प्रकरण में केवल $(R_E - d)$ त्रिज्या का छोटा गोला ही g के लिए योगदान देता है।*

अत: बिन्दु द्रव्यमान पर आरोपित बल

$$F(d) = G M_s m / (R_E - d)^2 \qquad (7.17)$$

ऊपर से M_s का मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$F(d) = G M_E m (R_E - d) / R_E^3 \qquad (7.18)$$

और इस प्रकार गहराई d पर गुरुत्वीय त्वरण,

$$g(d) = \frac{F(d)}{m}$$

अर्थात् $g(d) = \frac{F(d)}{m} = \frac{GM_E}{R_E^3}(R_E - d)$

$$= g\frac{R_E - d}{R_E} = g(1 - d/R_E) \qquad (7.19)$$

इस प्रकार जैसे-जैसे हम पृथ्वी से नीचे अधिक गहराई तक जाते हैं, गुरुत्वीय त्वरण का मान गुणक $(1 - d/R_E)$ द्वारा घटता जाता है। पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण से संबंधित यह एक आश्चर्यजनक तथ्य है कि पृष्ठ पर इसका मान अधिकतम है तथा चाहे हम पृष्ठ से ऊपर जाएँ अथवा नीचे यह मान सदैव घटता है।

7.7 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

पहले हमने स्थितिज ऊर्जा की धारणा की चर्चा किसी वस्तु की दी हुई स्थिति पर उसमें संचित ऊर्जा के रूप में दी थी। यदि किसी कण की स्थिति उस पर कार्यरत बल के कारण परिवर्तित हो जाती है तो उस कण की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन आरोपित बल द्वारा उस कण पर किए गए कार्य के परिमाण के ठीक-ठीक बराबर होगा। जैसा कि हम पहले चर्चा कर चुके हैं जिन बलों द्वारा किया गया कार्य चले गए पथों पर निर्भर नहीं करता, वे बल **संरक्षी बल** होते हैं तथा केवल ऐसे बलों के लिए ही किसी पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा की कोई सार्थकता होती है।

गुरुत्व बल एक संरक्षी बल है तथा हम किसी पिण्ड में इस बल के कारण उत्पन्न स्थितिज ऊर्जा, जिसे गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं, का परिकलन कर सकते हैं। पहले पृथ्वी के पृष्ठ के निकट के उन बिन्दुओं पर विचार कीजिए जिनकी पृष्ठ से दूरियाँ पृथ्वी की त्रिज्या की तुलना में बहुत कम हैं। जैसा कि हम देख चुके हैं ऐसे प्रकरणों में गुरुत्वीय बल व्यावहारिक दृष्टि से नियत रहता है तथा यह mg होता है तथा इसकी दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है। यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से h_1 ऊँचाई पर स्थित किसी बिन्दु तथा इसी बिन्दु के ठीक ऊर्ध्वाधर ऊपर h_2 ऊँचाई पर स्थित किसी अन्य बिन्दु पर विचार करें तो m द्रव्यमान के किसी कण को पहली स्थिति से दूसरी स्थिति तक ऊपर उठाने में किया गया कार्य, जिसे W_{12} द्वारा निर्दिष्ट करते हैं,

$$W_{12} = \text{बल} \times \text{विस्थापन}$$
$$= mg\,(h_2 - h_1)\,. \qquad (7.20)$$

यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊँचाई के बिन्दु से कोई स्थितिज ऊर्जा $W(h)$ संबद्ध करें जो इस प्रकार है कि

$$W(h) = mg\,h + W_o \qquad (7.21)$$

(यहाँ W_o = नियतांक) ;

तब यह स्पष्ट है कि

$$W_{12} = W(h_2) - W(h_1) \qquad (7.22)$$

कण को स्थानांतरित करने में किया गया कार्य ठीक इस कण की अंतिम तथा आरंभिक स्थितियों की स्थितिज ऊर्जाओं के अंतर के बराबर है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (7.22) में W_o निरस्त हो जाता है। समीकरण (7.21) में $h = 0$ रखने पर हमें $W(h = 0) = W_o$ प्राप्त होता है। $h = 0$ का अर्थ यह है कि दोनों बिन्दु पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थित हैं। इस प्रकार W_o कण की पृथ्वी के पृष्ठ पर स्थितिज ऊर्जा हुई।

यदि हम पृथ्वी के पृष्ठ से यादृच्छिक दूरियों के बिन्दुओं पर विचार करें तो उपरोक्त परिणाम प्रामाणिक नहीं होते क्योंकि तब यह मान्यता कि गुरुत्वाकर्षण बल mg अपरिवर्तित रहता है वैध नहीं है। तथापि, अपनी अब तक की चर्चा के आधार पर हम जानते हैं कि पृथ्वी के बाहर के किसी बिन्दु पर स्थित किसी कण पर लगे गुरुत्वीय बल की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर निदेशित होती है तथा इस बल का परिमाण है,

$$F = \frac{G M_E\, m}{r^2} \qquad (7.23)$$

यहाँ M_E = पृथ्वी का द्रव्यमान, m = कण का द्रव्यमान तथा r इस कण की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी है। यदि हम किसी कण को $r = r_1$ से $r = r_2$ तक (जबकि $r_2 > r_1$) ऊर्ध्वाधर पथ के अनुदिश ऊपर उठाने में किए गए कार्य का परिकलन करें तो हमें समीकरण (7.20) के स्थान पर यह संबंध प्राप्त होता है

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{G M m}{r^2}\, \mathrm{d}r$$

$$= -G M_E\, m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \qquad (7.24)$$

इस प्रकार समीकरण (7.21) के बजाय, हम किसी दूरी r पर स्थितिज ऊर्जा $W(r)$ को इस प्रकार संबद्ध कर सकते हैं :

$$W(r) = -\frac{G M_E\, m}{r} + W_1\,, \qquad (7.25)$$

जो कि $r > R$ के लिए वैध है।

अतः एक बार फिर $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ । अंतिम समीकरण में $r = \infty$ रखने पर हमें $W(r = \infty) = W_1$ प्राप्त होता है। इस प्रकार W_1 अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा हुई। हमें यह ध्यान देना चाहिए कि समीकरणों (7.22) तथा (7.24) के अनुसार केवल दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जाओं में अंतर की ही कोई निश्चित सार्थकता है। हम प्रचलित मान्य परिपाटी के अनुसार W_1 को शून्य मान लेते हैं जिसके कारण *किसी बिन्दु पर किसी कण की स्थितिज ऊर्जा उस कण को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में किए जाने वाले कार्य के ठीक बराबर होती है।*

हमने, किसी बिन्दु पर किसी कण की स्थितिज ऊर्जा का परिकलन उस कण पर लगे पृथ्वी के गुरुत्वीय बलों के कारण, जो कि कण के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है, किया है। पृथ्वी के गुरुत्वीय बल के कारण किसी *बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव* की परिभाषा *"उस बिन्दु पर किसी कण के एकांक द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा"* के रूप में की जाती है।

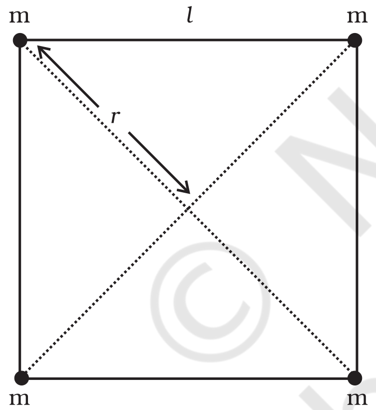
पूर्व विवेचन के आधार पर, हम जानते हैं कि m_1 एवं m_2 द्रव्यमान के एक दूसरे से r दूरी पर रखे दो कणों की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा है,

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r} \quad (\text{यदि हम } r = \infty \text{ पर } V = 0 \text{ लें})$$

यह भी ध्यान दिया जाना चाहिए कि कणों के किसी सभी वियुक्त निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा, अवयवों/कणों के सभी संभावित युग्मों की ऊर्जाओं (उपरोक्त समीकरण द्वारा परिकलित) के योग के बराबर होती है। यह अध्यारोपण सिद्धांत के एक अनुप्रयोग का उदाहरण है।

उदाहरण 7.3 l भुजा के किसी वर्ग के शीर्षों पर स्थित चार कणों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। वर्ग के केन्द्र पर विभव भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर मान लीजिए प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है, तथा वर्ग की भुजा l है। हमारे पास l दूरी वाले 4 द्रव्यमान युगल तथा $\sqrt{2}\,l$ दूरी वाले 2 द्रव्यमान युगल हैं। अत: निकाय की स्थितिज ऊर्जा



चित्र 7.9

$$W(r) = -4\frac{G m^2}{l} - 2\frac{G m^2}{\sqrt{2}\, l}$$

$$= -\frac{2 G m^2}{l}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{G m^2}{l}$$

वर्ग के केन्द्र $\left(r = \sqrt{2}\, l/2\right)$ पर गुरुत्वीय विभव,

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{G m}{l}$$

7.8 पलायन चाल

यदि हम अपने हाथों से किसी पत्थर को फेंकते हैं, तो हम यह पाते हैं कि वह फिर वापस पृथ्वी पर गिर जाता है। निस्संदेह मशीनों का उपयोग करके हम किसी पिण्ड को अधिकाधिक तीव्रता तथा प्रारंभिक वेगों से शूट कर सकते हैं जिसके कारण पिण्ड अधिकाधिक ऊँचाइयों तक पहुँच जाते हैं। तब स्वाभाविक रूप से हमारे मस्तिष्क में यह विचार उत्पन्न होता है "क्या हम किसी पिण्ड को इतने अधिक आरंभिक चाल से ऊपर फेंक सकते हैं कि वह फिर पृथ्वी पर वापस न गिरे?"

इस प्रश्न का उत्तर देने में ऊर्जा संरक्षण नियम हमारी सहायता करता है। मान लीजिए फेंका गया पिण्ड अनन्त तक पहुंचता है और वहाँ उसकी चाल V_f है। किसी पिण्ड की ऊर्जा स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाओं का योग होती है। पहले की ही भांति W_1 पिण्ड की अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को निर्दिष्ट करता है। तब प्रक्षेप्य की अनन्त पर कुल ऊर्जा

$$E(\text{अनन्त}) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \qquad (7.26)$$

यदि पिण्ड को पृथ्वी (R_E = पृथ्वी की त्रिज्या) के केन्द्र से $(h + R_E)$ ऊँचाई पर स्थित किसी बिन्दु से आरंभ में चाल V_i से फेंका गया था, तो इस पिण्ड की आरंभिक ऊर्जा थी

$$E(h + R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h + R_E)} + W_1 \qquad (7.27)$$

ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार समीकरण (7.26) तथा (7.27) बराबर होने चाहिए। अत:

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h + R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \qquad (7.28)$$

समीकरण (7.28) का दक्षिण पक्ष एक धनात्मक राशि है जिसका न्यूनतम मान शून्य है, अत: वाम पक्ष भी ऐसा ही होना चाहिए। अत: कोई पिण्ड अनन्त तक पहुंच सकता है जब V_i इतना हो कि

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h + R_E)} \geq 0 \qquad (7.29)$$

V_i का न्यूनतम मान उस प्रकरण के तदनुरूपी है जिसमें समीकरण (7.29) का वाम पक्ष शून्य के बराबर है। इस प्रकार, किसी पिण्ड को अनन्त तक पहुंचने के लिए (अर्थात् पृथ्वी से पलायन के लिए) आवश्यक न्यूनतम चाल इस संबंध के तदनुरूपी होती है

$$\frac{1}{2}m\left(V_i^2\right)_{\text{न्यून}} = \frac{GmM_E}{h+R_E} \qquad (7.30)$$

यदि पिण्ड को पृथ्वी के पृष्ठ से छोड़ा जाता है, तो $h = 0$ और हमें प्राप्त होता है

$$\left(V_i\right)_{\text{न्यून}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (7.31)$$

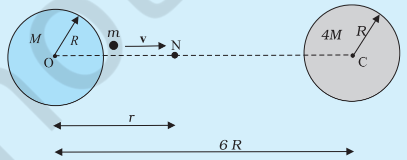
संबंध $g = GM_E / R_E^2$ का उपयोग करने पर हमें निम्न मान प्राप्त होता है

$$\left(V_i\right)_{\text{न्यून}} = \sqrt{2gR_E} \qquad (7.32)$$

समीकरण (7.32) में g और R_E के आंकिक मान रखने पर हमें $(V_i)_{\text{न्यून}} \approx 11.2$ km/s प्राप्त होता है। उसे **पलायन चाल** कहते हैं। कभी–कभी लापरवाही में इसे हम पलायन वेग भी कह देते हैं।

समीकरण (7.32) का उपयोग भली भांति समान रूप से चन्द्रमा से फेंके जाने वाले पिण्डों के लिए भी किया जा सकता है, ऐसा करते समय हम g के स्थान पर चन्द्रमा के पृष्ठ पर चन्द्रमा के गुरुत्वीय त्वरण तथा R_E के स्थान पर चन्द्रमा की त्रिज्या का मान रखते हैं। इन दोनों ही राशियों के चन्द्रमा के लिए मान पृथ्वी पर इनके मानों से कम हैं तथा चन्द्रमा के लिए पलायन चाल का मान 2.3 km/s प्राप्त होता है। यह मान पृथ्वी की तुलना में लगभग 1/5 गुना है। यही कारण है कि चन्द्रमा पर कोई वातावरण नहीं है। यदि चन्द्रमा के पृष्ठ पर गैसीय अणु बनें, तो उनकी चाल इस पलायन चाल से अधिक होगी तथा वे चन्द्रमा के गुरुत्वीय खिंचाव के बाहर पलायन कर जाएंगे।

उदाहरण 7.4 समान त्रिज्या R परन्तु M तथा $4M$ द्रव्यमान के दो एकसमान ठोस गोले इस प्रकार रखे हैं कि इनके केन्द्रों के बीच पृथकन (चित्र 7.10 में दर्शाए अनुसार) $6R$ है। दोनों गोले स्थिर रखे गए हैं। m द्रव्यमान के किसी प्रक्षेप्य को M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ से $4M$ द्रव्यमान के गोले के केन्द्र की ओर सीधे प्रक्षेपित किया जाता है। प्रक्षेप्य की उस न्यूनतम चाल के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए जिससे फेंके जाने पर वह दूसरे गोले के पृष्ठ पर पहुंच जाए।



चित्र 7.10

हल प्रक्षेप्य पर दो गोलों के परस्पर विरोधी गुरुत्वीय बल कार्य करते हैं। उदासीन बिन्दु N (चित्र 7.10 देखिए) की परिभाषा एक ऐसे बिन्दु (स्थिति) के रूप में की जाती है जहाँ दो बल यथार्थतः एक दूसरे को निरस्त करते हैं। यदि ON = r है, तो

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4GMm}{(6R-r)^2}$$

$$(6R - r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$$r = 2R \quad \text{या} - 6R$$

इस उदाहरण में उदासीन बिन्दु $r = -6R$ हमसे संबंधित नहीं है। इस प्रकार, ON = $r = 2R$। कण को उस चाल से प्रक्षेपित करना पर्याप्त है जो उसे N तक पहुंचने योग्य बना दे। इसके पश्चात् वहाँ पहुंचने पर $4M$ द्रव्यमान के गोले का गुरुत्वीय बल कण को अपनी ओर खींचने के लिए पर्याप्त होगा। M द्रव्यमान के गोले के पृष्ठ पर यांत्रिक ऊर्जा

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{4GMm}{5R}$$

उदासीन बिन्दु N पर कण की चाल शून्य मान की ओर प्रवृत्त होती है। अतः N पर यांत्रिक ऊर्जा शुद्ध रूप से स्थितिज ऊर्जा होती है। अतः

$$E_N = -\frac{GMm}{2R} - \frac{4GMm}{4R}$$

यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

अथवा

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$$

यहाँ यह ध्यान देने का विषय है कि N पर प्रक्षेप्य की चाल शून्य है, परन्तु जब यह $4M$ द्रव्यमान के गोले से टकराता तब इसकी चाल शून्येत्तर होती है। जिस चाल से प्रक्षेप्य $4M$ द्रव्यमान के गोले से टकराता है, उसे ज्ञात करना छात्रों के अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है। ◀

7.9 भू उपग्रह

भू उपग्रह वह पिण्ड है जो पृथ्वी के परितः परिक्रमण करते हैं। इनकी गतियां, ग्रहों की सूर्य के परितः गतियों के बहुत समान

होती हैं, अत: केप्लर के ग्रहीय गति नियम इन पर भी समान रूप से लागू होते हैं। विशेष बात यह है कि इन उपग्रहों की पृथ्वी के परित: कक्षाएं वृत्ताकार अथवा दीर्घवृत्ताकार है। पृथ्वी का एकमात्र प्राकृतिक उपग्रह चन्द्रमा है जिसकी लगभग वृत्ताकार कक्षा है और लगभग 27.3 दिन का परिक्रमण काल है जो चन्द्रमा के अपनी अक्ष के परित: घूर्णन काल के लगभग समान है। वर्ष 1957 के पश्चात् विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी में उन्नति के फलस्वरूप भारत सहित कई देश दूर संचार, भू भौतिकी, मौसम विज्ञान के क्षेत्र में व्यावहारिक उपयोगों के लिए मानव-निर्मित भू उपग्रहों को कक्षाओं में प्रमोचित करने योग्य बन गए हैं।

अब हम पृथ्वी के केन्द्र से $(R_E + h)$ दूरी पर स्थित वृत्तीय कक्षा में गतिमान उपग्रह पर विचार करेंगे, यहाँ R_E = पृथ्वी की त्रिज्या है। यदि उपग्रह का द्रव्यमान m तथा V इसकी चाल है, तो इस कक्षा के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल

$$F(\text{अभिकेन्द्र}) = \frac{mV^2}{(R_E + h)} \tag{7.33}$$

तथा यह बल कक्षा के केन्द्र की ओर निदेशित है। अभिकेन्द्र बल गुरुत्वाकर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है, जिसका मान

$$F(\text{गुरुत्वाकर्षण}) = \frac{G\,m\,M_E}{(R_E + h)^2} \tag{7.34}$$

यहाँ M_E पृथ्वी का द्रव्यमान है।

समीकरणों (7.33) तथा (7.34) के दक्षिण पक्षों को समीकृत तथा m का निरसन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$V^2 = \frac{G\,M_E}{(R_E + h)} \tag{7.35}$$

इस प्रकार h के बढ़ने पर V घटता है। समीकरण (7.35) के अनुसार जब $h = 0$ है, तो उपग्रह की चाल V है

$$V^2 \quad (h = 0) \;=\; GM_E / R_E \;=\; gR_E \tag{7.36}$$

यहाँ हमने संबंध $g = G\,M_E / R_E^2$ का उपयोग किया है। प्रत्येक कक्षा में उपग्रह $2\pi(R_E + h)$ दूरी चाल V से तय करता है। अत: इसका आवर्तकाल T है

$$T = \frac{2\pi(R_E + h)}{V} = \frac{2\pi(R_E + h)^{3/2}}{\sqrt{G\,M_E}} \tag{7.37}$$

यहाँ हमने समीकरण (7.35) से V का मान प्रतिस्थापित किया है। समीकरण (7.37) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$T^2 = k\,(R_E + h)^3 \;(\text{जहाँ } k = 4\pi^2 / G\,M_E), \tag{7.38}$$

और यही केप्लर का आवर्तकालों का नियम है जिसका अनुप्रयोग पृथ्वी के परित: उपग्रहों की गतियों के लिए किया जाता है।

उन भू उपग्रहों के लिए, जो पृथ्वी के पृष्ठ के अति निकट होते हैं, h के मान को पृथ्वी की त्रिज्या R_E की तुलना में समीकरण (7.38) में नगण्य मान लेते हैं। अत: इस प्रकार के भू उपग्रहों के लिए T ही T_o होता है, यहाँ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \tag{7.39}$$

यदि हम समीकरण (7.39) में g तथा R_E के आंकिक मानों ($g \simeq 9.8\ \text{ms}^{-2}$ तथा $R_E = 6400$ km.) को प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}\ \text{s}$$

जो लगभग 85 मिनट के बराबर हैं।

उत्तर 7.5 मंगल ग्रह के फोबोस तथा डेल्मोस नामक दो चन्द्रमा हैं। (i) यदि फोबोस का आवर्तकाल 7 घंटे 39 मिनट तथा कक्षीय त्रिज्या 9.4×10^3 km है तो मंगल का द्रव्यमान परिकलित कीजिए। (ii) यह मानते हुए कि पृथ्वी तथा मंगल सूर्य के परित: वृत्तीय कक्षाओं में परिक्रमण कर रहे हैं तथा मंगल की कक्षा की त्रिज्या पृथ्वी की कक्षा की त्रिज्या की 1.52 गुनी है तो मंगल-वर्ष की अवधि दिनों में क्या है?

हल (i) यहाँ पर समीकरण (7.38) का उपयोग पृथ्वी के द्रव्यमान M_E को मंगल के द्रव्यमान M_m से प्रतिस्थापित करके करते हैं

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m} R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$$M_m = \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times(4.59\times6)^2\times10^{-5}}$$

$= 6.48 \times 10^{23}$ kg

(ii) केप्लर के आवर्तकालों के नियम का उपयोग करने पर

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

यहाँ R_{MS} एवं R_{ES} क्रमशः मंगल-सूर्य तथा पृथ्वी-सूर्य के बीच की दूरियां हैं।

$\therefore \quad T_M = (1.52)^{3/2} \times 365$

$= 684$ दिन

ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि बुध, मंगल तथा प्लूटो के अतिरिक्त सभी ग्रहों की कक्षाएं लगभग वृत्ताकार हैं। उदाहरण के लिए, हमारी पृथ्वी के अर्ध लघु अक्ष तथा अर्ध दीर्घ अक्ष का अनुपात $b/a = 0.99986$ है।

उत्तर 7.6 पृथ्वी को तोलना : आपको निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं: $g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $R_E = 6.37\times10^6\mathrm{m}$, पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी $R = 3.84\times10^8$ m पृथ्वी के परितः चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्त काल = 27.3 दिन। दो भिन्न विधियों द्वारा पृथ्वी का द्रव्यमान प्राप्त कीजिए।

हल ***(i)* पहली विधि :** समीकरण (7.12) से

$$M_E = \frac{g R_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81\times\left(6.37\times10^6\right)^2}{6.67\times10^{-11}}$$

$= 5.97\times 10^{24}$ kg

***(ii)* दूसरी विधि :** चन्द्रमा पृथ्वी का उपग्रह है। केप्लर के आवर्तकालों के नियम की व्युत्पत्ति में (समीकरण (7.38) देखिए)]

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$$

$$= \frac{4\times3.14\times3.14\times(3.84)^3\times10^{24}}{6.67\times10^{-11}\times(27.3\times24\times60\times60)^2}$$

$$= 6.02\times10^{24}\ \mathrm{kg}$$

दोनों विधियों द्वारा लगभग समान उत्तर प्राप्त होते हैं, जिनमें 1% से भी कम का अंतर है। ◀

उदाहरण 7.7 समीकरण (7.38) में स्थिरांक k को दिनों तथा किलोमीटरों में व्यक्त कीजिए। $k = 10^{-13}\ \mathrm{s^2\,m^{-3}}$ है। चन्द्रमा पृथ्वी से 3.84×10^5km दूर है। चन्द्रमा के परिक्रमण के आवर्तकाल को दिनों में प्राप्त कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$k = 10^{-13}\ \mathrm{s^2\,m^{-3}}$

$$= 10^{-13}\left[\frac{1}{(24\times60\times60)^2}\mathrm{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\mathrm{km}^3}\right]$$

$= 1.33\times10^{-14}\ \mathrm{d^2\ km^{-3}}$

समीकरणों (7.38) तथा k के दिए गए मान का उपयोग करने पर चन्द्रमा के परिक्रमण का आवर्तकाल

$T^2 = (1.33\times10^{-14})(3.84\times10^5)^3$

$T = 27.3$ d ◀

ध्यान दीजिए, यदि हम (R_E+h) को दीर्घवृत्त के अर्ध दीर्घ अक्ष (a) द्वारा प्रतिस्थापित करें तो समीकरण (7.38) को दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर भी लागू किया जा सकता है, तब पृथ्वी इस दीर्घवृत्त की एक नाभि पर होगी।

7.10 कक्षा में गतिशील उपग्रह की ऊर्जा

समीकरण (7.35) का उपयोग करने पर वृत्ताकार कक्षा में चाल v से गतिशील उपग्रह की गतिज ऊर्जा

$$K.E = \frac{1}{2} m v^2;$$

v^2 का मान समीकरण (7.35) से रखने पर

$$= \frac{Gm M_E}{2(R_E+h)}, \tag{7.40}$$

ऐसा मानें कि अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य है तब पृथ्वी के केन्द्र से (R_e+h) दूरी पर उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा

$$P.E = -\frac{G m M_E}{(R_E+h)} \tag{7.41}$$

K.E धनात्मक है जबकि P.E ऋणात्मक होती है। तथापि परिमाण में $K.E = \frac{1}{2}$ P.E, अतः उपग्रह की कुल ऊर्जा

$$E = K.E + P.E = -\frac{G m M_E}{2(R_E+h)} \tag{7.42}$$

इस प्रकार वृत्ताकार कक्षा में गतिशील किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है, स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक तथा परिमाण में धनात्मक गतिज ऊर्जा का दो गुना होता है।

जब किसी उपग्रह की कक्षा दीर्घवृत्तीय होती है तो उसकी K.E तथा P.E दोनों ही पथ के हर बिन्दु पर भिन्न होती हैं। वृत्तीय कक्षा के प्रकरण की भांति ही उपग्रह की कुल ऊर्जा नियत रहती है तथा यह ऋणात्मक होती है और यही हम अपेक्षा

भी करते हैं क्योंकि जैसा हम पहले चर्चा कर चुके हैं कि यदि कुल ऊर्जा धनात्मक अथवा शून्य हो तो पिण्ड अनन्त की ओर पलायन कर जाता है। उपग्रह सदैव पृथ्वी से परिमित दूरियों पर परिक्रमण करते हैं, अत: उनकी ऊर्जाएँ धनात्मक अथवा शून्य नहीं हो सकतीं।

उदाहरण 7.8 400 kg द्रव्यमान का कोई उपग्रह पृथ्वी के परित $2R_E$ त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। इसे $4R_E$ की वृत्तीय कक्षा में स्थानांतरित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा परिकलित कीजिए। इसकी गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा में कितने परिवर्तन होंगे?

हल आरंभ में

$$E_i = -\frac{G\,M_E\,m}{4\,R_E}$$

जबकि, अंत में

$$E_f = -\frac{G\,M_E\,m}{8\,R_E}$$

कुल ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$= \frac{G\,M_E\,m}{8\,R_E} = \left(\frac{G\,M_E}{R_E^2}\right)\frac{m\,R_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g\,m\,R_E}{8} = \frac{9.81\times 400\times 6.37\times 10^6}{8} = 3.13\times 10^9\,\mathrm{J}$$

गतिज ऊर्जा घट जाती है और यह ΔE की अनुहारक है, अर्थात् $\Delta K = K_f - K_i = -\,3.13\times 10^9\,\mathrm{J}$ ।

स्थितिज ऊर्जा में होने वाला परिवर्तन कुल ऊर्जा का दो गुना है, अर्थात्

$$\Delta V = V_f - V_i = -\,6.25\times 10^9\,\mathrm{J}$$

सारांश

1. न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम यह उल्लेख करता है कि दूरी r से पृथकन वाले m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के किन्ही दो कणों के बीच लगे गुरुत्वीय आकर्षण बल का परिमाण

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

यहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक है जिसका मान $6.672\times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ है।

2. यदि हमें M_1, M_2, M_3…M_n आदि बहुत से कणों के कारण m द्रव्यमान के किसी कण पर लगे परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल को ज्ञात करना है, तो इसके लिए हम अध्यारोपण सिद्धान्त का उपयोग करते हैं। मान लीजिए गुरुत्वाकर्षण नियम द्वारा M_1, M_2,….M_n में प्रत्येक द्वारा m पर आरोपित व्यष्टिगत बल $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,….$\mathbf{F}_n$ हैं। तब बलों के अध्यारोपण सिद्धान्त के अनुसार प्रत्येक बल अन्य पिण्डों द्वारा प्रभावित हुए बिना स्वतंत्रतापूर्वक कार्य करता है। तब इनका परिणामी बल $\mathbf{F}_R$ सदिशों के योग द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i$$

यहाँ प्रतीक 'Σ' संकलन को दर्शाता है।

3. केप्लर के ग्रहगति नियम यह स्पष्ट करते हैं कि
   (a) सभी ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में गति करते हैं तथा सूर्य इस कक्षा की किसी एक नाभि पर स्थित होता है।
   (b) सूर्य से किसी ग्रह तक खींचा गया त्रिज्य सदिश समान समय अन्तरालों में समान क्षेत्रफल प्रसर्प करता है। यह इस तथ्य का पालन करता है कि ग्रहों पर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल केन्द्रीय हैं। अत: कोणीय संवेग अपरिवर्तित रहता है।
   (c) किसी ग्रह के कक्षीय आवर्तकाल का वर्ग उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्ध दीर्घ अक्ष के घन के अनुक्रमानुपाती होता है। सूर्य के परित: R की वृत्ताकार कक्षा में परिक्रमण कर रहे ग्रह के आवर्तकाल T तथा त्रिज्या R में यह संबंध होता है

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\,M_s}\right)R^3$$

यहाँ M_s सूर्य का द्रव्यमान है। अधिकांश ग्रहों की सूर्य के परितः लगभग वृत्तीय कक्षाएँ हैं। यदि R का प्रतिस्थापन ग्रह की दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्ध दीर्घ अक्ष a से कर दें तो उपरोक्त नियम दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर समान रूप से लागू होता है।

4. गुरुत्वीय त्वरण

(a) पृथ्वी के पृष्ठ से h ऊँचाई पर

$$g(h) = \frac{G\,M_E}{(R_E + h)^2}$$

$$\approx \frac{G\,M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad h << R_E$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad \text{यहाँ} \quad g(0) = \frac{G\,M_E}{R_E^2}$$

(b) पृथ्वी के पृष्ठ के नीचे d गहराई पर

$$g(d) = \frac{G\,M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1 - \frac{d}{R_E}\right)$$

5. गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी बल है। इसलिए किसी स्थितिज ऊर्जा फलन को परिभाषित किया जा सकता है। r पृथकन के किन्ही दो कणों से संबद्ध गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$V = -\frac{G\,m_1\,m_2}{r}$$

यहाँ $r \to \infty$ पर V को शून्य माना। कणों के किसी निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा उन कणों के सभी युगलों की ऊर्जाओं का योग होता है जिसमें प्रत्येक युगल का निरूपण ऊपर व्यक्त सूत्र के पदों में किया जाता है। इसका निर्धारण अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुगमन द्वारा किया गया है।

6. यदि किसी वियुक्त निकाय में m द्रव्यमान का कोई कण किसी भारी पिण्ड, जिसका द्रव्यमान M है, के निकट v चाल से गतिमान है, तो उस कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{G\,M\,m}{r}$$

अर्थात् कुल यांत्रिक ऊर्जा गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाओं का योग है। कुल ऊर्जा गति का स्थिरांक होती है।

7. यदि M के परितः a त्रिज्या की कक्षा में m गतिशील है, जबकि $M >> m$, तो निकाय की कुल ऊर्जा

$$E = -\frac{G\,M\,m}{2a}$$

यह उपरोक्त बिन्दु 5 में दी गयी स्थितिज ऊर्जा में यादृच्छिक स्थिरांक के चयन के अनुसार है। किसी भी परिबद्ध निकाय, अर्थात्, ऐसा निकाय जिसमें कक्षा बन्द हो जैसे दीर्घवृत्तीय कक्षा, की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है। गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएँ हैं

$$K = \frac{G\,M\,m}{2a}$$

$$V = -\frac{G\,M\,m}{a}$$

8. पृथ्वी के पृष्ठ से पलायन चाल

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

इसका मान 11.2 km s^{-1} है।

9. यदि कोई कण किसी एकसमान गोलीय खोल अथवा गोलीय सममित भीतरी द्रव्यमान वितरण के ठोस गोले के बाहर है, तो गोला कण को इस प्रकार आकर्षित करता है जैसे कि उस गोले अथवा खोल का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित हो।

10. यदि कोई कण किसी एकसमान गोलीय खोल के भीतर है, तो उस कण पर लगा गुरुत्वीय बल शून्य है। यदि कोई कण किसी संभागी ठोस गोले के भीतर है, तो कण पर लगा बल गोले के केन्द्र की ओर होता है। यह बल कण के अंतस्थ गोलीय द्रव्यमान द्वारा आरोपित किया जाता है।

भौतिक राशि	प्रतीक	विमाएँ	मात्रक	टिप्पणी
गुरुत्वीय स्थिरांक	G	$[M^{-1} L^{3} T^{-2}]$	$N\ m^{2}\ kg^{-2}$	6.67×10^{-11}
गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा	$V(r)$	$[M\ L^{-2}T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$ (अदिश)
गुरुत्वीय विभव	$U(r)$	$[L^{-2}T^{-2}]$	$J\ kg^{-1}$	$-\frac{GM}{r}$ (अदिश)
गुरुत्वीय तीव्रता	$\mathbf{E}$ अथवा $\mathbf{g}$	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	$\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ (सदिश)

विचारणीय विषय

1. किसी पिण्ड की किसी अन्य पिण्ड के गुरुत्वीय प्रभाव के अन्तर्गत गति का अध्ययन करते समय निम्नलिखित राशियाँ संरक्षित रहती हैं :
   (a) कोणीय संवेग,
   (b) कुल यांत्रिक ऊर्जा
   रैखिक संवेग का संरक्षण **नहीं** होता।
2. कोणीय संवेग संरक्षण केप्लर के द्वितीय नियम की ओर उन्मुख कराता है। तथापि यह गुरुत्वाकर्षण के व्युत्क्रम वर्ग नियम के लिए विशिष्ट नहीं है। यह किसी भी केन्द्रीय बल पर लागू होता है।
3. केप्लर के तीसरे नियम, $T^2 = K_S R^3$ में स्थिरांक K_S वृत्तीय कक्षाओं में गति करने वाले प्रत्येक ग्रह के लिए समान होता है। यह ग्रहों के अनुसार परिवर्तित नहीं होता। पृथ्वी की परिक्रमा करने वाले उपग्रहों पर भी यही टिप्पणी लागू होती है। [(समीकरण (7.38)]
4. अन्तरिक्ष उपग्रहों में अन्तरिक्ष यात्री भारहीनता अनुभव करते हैं। इसका कारण यह नहीं है कि अंतरिक्ष की उस अवस्थिति में गुरुत्वाकर्षण बल कम है। वरन इसका कारण यह है कि अन्तरिक्ष यात्री तथा उपग्रह दोनों ही पृथ्वी की ओर स्वंतत्रतापूर्वक गिरते हैं।
5. दूरी R के पृथकन वाले दो बिन्दुओं से संबद्ध गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

   $$V = -\frac{G\, m_1\, m_2}{r} + \text{स्थिरांक}$$

   यहाँ स्थिरांक को कुछ भी मान दिया जा सकता है। इसे शून्य मानना सरलतम चयन है। इस चयन के अनुसार

   $$V = -\frac{G\, m_1\, m_2}{r}$$

   इस चयन से यह अंतर्निहित है कि जब $r \to \infty$ है तो $V \to 0$ होता है। गुरुत्वीय ऊर्जा के शून्य होने की अवस्थिति का चयन स्थितिज ऊर्जा में यादृच्छिक स्थिरांक के चयन के समान ही है। ध्यान दीजिए, इस स्थिरांक के चयन से गुरुत्वीय बल परिवर्तित नहीं होता।
6. किसी पिण्ड की कुल यांत्रिक ऊर्जा इसकी गतिज ऊर्जा (जो सदैव धनात्मक होती है) तथा स्थितिज ऊर्जा का योग होती है। अनन्त के सापेक्ष (अर्थात्, यदि हम मान लें कि पिण्ड की अनन्त पर स्थितिज ऊर्जा शून्य है), किसी पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होती है। किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है।

7. स्थितिज ऊर्जा के लिए सामान्यत: दिखाई देने वाला व्यंजक mgh, वास्तव में, ऊपर बिन्दु 6 के अन्तर्गत स्पष्ट किए अनुसार गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जाओं के अन्तर का सन्निकट मान होता है।
8. यद्यपि दो बिन्दुओं के बीच गुरुत्वाकर्षण बल केन्द्रीय है, तथापि दो परिमित दृढ़ पिण्डों के बीच लगने वाले बल का इन दोनों द्रव्यमानों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होना आवश्यक नहीं है। किसी गोलीय सममित पिण्ड के लिए उस पिण्ड से बाहर स्थित किसी कण पर लगा बल इस प्रकार लगता है जैसे कि पिण्ड का समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर संकेन्द्रित हो और इसीलिए यह बल केन्द्रीय होता है।
9. गोलीय खोल के भीतर किसी कण बिन्दु पर गुरुत्वीय बल शून्य होता है। तथापि (किसी धात्विक खोल के विपरीत, जो वैद्युत बलों से परिरक्षण करता है) यह खोल अपने से बाहर स्थित दूसरे पिण्डों को गुरुत्वीय बलों के आरोपित होने से अपने भीतर स्थित कणों का परिरक्षण नहीं करता। *गुरुत्वीय परिरक्षण संभव नहीं है*।

अभ्यास

7.1 निम्नलिखित के उत्तर दीजिए:

(a) आप किसी आवेश का वैद्युत बलों से परिरक्षण उस आवेश को किसी खोखले चालक के भीतर रखकर कर सकते हैं। क्या आप किसी पिण्ड का परिरक्षण, निकट में रखे पदार्थ के गुरुत्वीय प्रभाव से, उसे खोखले गोले में रखकर अथवा किसी अन्य साधनों द्वारा कर सकते हैं?

(b) पृथ्वी के परित: परिक्रमण करने वाले छोटे अन्तरिक्षयान में बैठा कोई अन्तरिक्ष यात्री गुरुत्व बल का संसूचन नहीं कर सकता। यदि पृथ्वी के परित: परिक्रमण करने वाला अन्तरिक्ष स्टेशन आकार में बड़ा है, तब क्या वह गुरुत्व बल के संसूचन की आशा कर सकता है?

(c) यदि आप पृथ्वी पर सूर्य के कारण गुरुत्वीय बल की तुलना पृथ्वी पर चन्द्रमा के कारण गुरुत्व बल से करें, तो आप यह पाएंगे कि सूर्य का खिंचाव चन्द्रमा के खिचाव की तुलना में अधिक है (इसकी जाँच आप स्वयं आगामी अभ्यासों में दिए गए आंकड़ों की सहायता से कर सकते हैं।) तथापि चन्द्रमा के खिंचाव का ज्वारीय प्रभाव सूर्य के ज्वारीय प्रभाव से अधिक है। क्यों?

7.2 सही विकल्प का चयन कीजिए :

(a) बढ़ती तुंगता के साथ गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

(b) बढ़ती गहराई के साथ (पृथ्वी को एकसमान घनत्व को गोला मानकर) गुरुत्वीय त्वरण बढ़ता/घटता है।

(c) गुरुत्चीय त्वरण पृथ्वी के द्रव्यमान/पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता।

(d) पृथ्वी के केन्द्र से r_2 तथा r_1 दूरियों के दो बिन्दुओं के बीच स्थितिज ऊर्जा–अन्तर के लिए सूत्र $-G\,Mm(1/r_2 - 1/r_1)$ सूत्र $mg(r_2 - r_1)$ से अधिक/कम यथार्थ है।

7.3 मान लीजिए एक ऐसा ग्रह है जो सूर्य के परित: पृथ्वी की तुलना में दो गुनी चाल से गति करता है, तब पृथ्वी की कक्षा की तुलना में इसका कक्षीय आमाप क्या है?

7.4 बृहस्पति के एक उपग्रह, आयो (Io), की कक्षीय अवधि 1.769 दिन तथा कक्षा की त्रिज्या 4.22×10^8 m है। यह दर्शाइए कि बृहस्पति का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान का लगभग 1/1000 गुना है।

7.5 मान लीजिए कि हमारी आकाशगंगा में एक सौर द्रव्यमान के 2.5×10^{11} तारे हैं। मंदाकिनीय केन्द्र से 50,000 ly दूरी पर स्थित कोई तारा अपनी एक परिक्रमा पूरी करने में कितना समय लेगा? आकाशगंगा का व्यास 10^5 ly लीजिए।

7.6 सही विकल्प का चयन कीजिए :

(a) यदि स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर है, तो कक्षा में परिक्रमा करते किसी उपग्रह की कुल ऊर्जा इसकी गतिज/स्थितिज ऊर्जा का ऋणात्मक है।

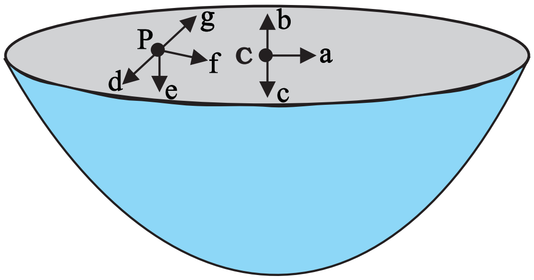
(b) कक्षा में परिक्रमा करने वाले किसी उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने के लिए आवश्यक ऊर्जा समान ऊंचाई (जितनी उपग्रह की है) के किसी स्थिर पिण्ड को पृथ्वी के प्रभाव से बाहर प्रक्षेपित करने के लिए आवश्यक ऊर्जा से अधिक/कम होती है।

7.7 क्या किसी पिण्ड की पृथ्वी से पलायन चाल (a) पिण्ड के द्रव्यमान, (b) प्रक्षेपण बिन्दु की अवस्थिति, (c) प्रक्षेपण की दिशा, (d) पिण्ड के प्रमोचन की अवस्थिति की ऊंचाई पर निर्भर करती है?

7.8 कोई धूमकेतु सूर्य की परिक्रमा अत्यधिक दीर्घवृत्तीय कक्षा में कर रहा है। क्या अपनी कक्षा में धूमकेतु की शुरू से अन्त तक (a) रैखिक चाल, (b) कोणीय चाल, (c) कोणीय संवेग, (d) गतिज ऊर्जा, (e) स्थितिज ऊर्जा (f) कुल ऊर्जा नियत रहती है। सूर्य के अति निकट आने पर धूमकेतु के द्रव्यमान में ह्रास को नगण्य मानिये।

7.9 निम्नलिखित में से कौन से लक्षण अन्तरिक्ष में अन्तरिक्ष यात्री के लिए दुख:दायी हो सकते हैं? (a) पैरों में सूजन, (b) चेहरे पर सूजन, (c) सिरदर्द, (d) दिक्‌विन्यास समस्या।

7.10 एकसमान द्रव्यमान घनत्व की अर्धगोलीय खोलों द्वारा परिभाषित ढोल के पृष्ठ के केन्द्र पर गुरुत्वीय तीव्रता की दिशा [देखिए चित्र 7.11] (i) a, (ii) b, (iii) c, (iv) 0 में किस तीर द्वारा दर्शायी जाएगी?



चित्र. 7.11

7.11 उपरोक्त समस्या में किसी यादृच्छिक बिन्दु P पर गुरुत्वीय तीव्रता किस तीर (i) d, (ii) e, (iii) f, (iv) g द्वारा व्यक्त की जाएगी?

7.12 पृथ्वी से किसी रॉकेट को सूर्य की ओर दागा गया है। पृथ्वी के केन्द्र से किस दूरी पर रॉकेट पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य है? सूर्य का द्रव्यमान = 2×10^{30} kg, पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} kg। अन्य ग्रहों आदि के प्रभावों की उपेक्षा कीजिए (कक्षीय त्रिज्या = 1.5×10^{11} m)।

7.13 आप सूर्य को कैसे तोलेंगे, अर्थात् उसके द्रव्यमान का आकलन कैसे करेंग? सूर्य के परित: पृथ्वी की कक्षा की औसत त्रिज्या 1.5×10^{8} km है।

7.14 एक शनि वर्ष एक पृथ्वी–वर्ष का 29.5 गुना है। यदि पृथ्वी सूर्य से 1.5×10^{8} km दूरी पर है, तो शनि सूर्य से कितनी दूरी पर है?

7.15 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 63 N है। पृथ्वी की त्रिज्या की आधी ऊंचाई पर पृथ्वी के कारण इस वस्तु पर गुरुत्वीय बल कितना है?

7.16 यह मानते हुए कि पृथ्वी एकसमान घनत्व का एक गोला है तथा इसके पृष्ठ पर किसी वस्तु का भार 250 N है, यह ज्ञात कीजिए कि पृथ्वी के केन्द्र की ओर आधी दूरी पर इस वस्तु का भार क्या होगा?

7.17 पृथ्वी के पृष्ठ से उर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर कोई रॉकेट 5 km s^{-1} की चाल से दागा जाता है। पृथ्वी पर वापस लौटने से पूर्व यह रॉकेट पृथ्वी से कितनी दूरी तक जाएगा? पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24} kg; पृथ्वी की माध्य त्रिज्या = 6.4×10^{6} m तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

7.18 पृथ्वी के पृष्ठ पर किसी प्रक्षेप्य की पलायन चाल 11.2 km s^{-1} है। किसी वस्तु को इस चाल की तीन गुनी चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। पृथ्वी से अत्यधिक दूर जाने पर इस वस्तु की चाल क्या होगी? सूर्य तथा अन्य ग्रहों की उपस्थिति की उपेक्षा कीजिए।

7.19 कोई उपग्रह पृथ्वी के पृष्ठ से 400 km ऊंचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा कर रहा है। इस उपग्रह को पृथ्वी के गुरुत्वीय प्रभाव से बाहर निकालने में कितनी ऊर्जा खर्च होगी? उपग्रह का द्रव्यमान = 200 kg; पृथ्वी का द्रव्यमान = 6.0×10^{24} kg; पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^{6} m तथा $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}।

7.20 दो तारे, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान (2×10^{30} kg) के बराबर है, एक दूसरे की ओर सम्मुख टक्कर के लिए आ रहे हैं। जब वे 10^{9} km दूरी पर हैं तब इनकी चाल उपेक्षणीय हैं। ये तारे किस चाल से टकराएंगे? प्रत्येक तारे की त्रिज्या 10^{4} km है। यह मानिए कि टकराने के पूर्व तक तारों में कोई विरूपण नहीं होता (G के ज्ञात मान का उपयोग कीजिए)।

7.21 दो भारी गोले जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 100 kg त्रिज्या 0.10 m है किसी क्षैतिज मेज पर एक दूसरे से 1.0 m दूरी पर स्थित हैं। दोनों गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु पर गुरुत्वीय बल तथा विभव क्या है? क्या इस बिन्दु पर रखा कोई पिण्ड संतुलन में होगा? यदि हां, तो यह संतुलन स्थायी होगा अथवा अस्थायी?